Dualidade de Schur-Weyl: uma perspectiva combinatória

João Miguel Magalhães Santos
Mestrado em Matemática
Departamento de Matemática
2016

Orientador
Samuel Lopes, Professor Auxiliar, FCUP

Todas as correções determinadas pelo júri, e só essas, foram efetuadas.

O Presidente do Júri,

Resumo

A teoria da representação é um dos mais versáteis e abrangentes ramos da teoria de grupos, com aplicações na física, na ciência dos computadores, na química e na maioria das áreas da matemática, incluindo combinatória, topologia e geometria algébrica. Após visitarmos, de um modo não exaustivo, os fundamentos da teoria de representação de grupos relativamente a espaços vectoriais sobre o corpo dos números complexos, focamos a nossa atenção sobre as ideias que estão por de trás da dualidade de Schur-Weyl, um processo que, idealizado por I. Schur e popularizado por H. Weyl no seu livro [14], permitiu obter as representações irredutíveis *polinomiais* do grupo infinito $\mathrm{GL}(V)$, o grupo das transformações lineares invertíveis de um espaço vectorial de dimensão finita V, em função das representações irredutíveis dos diferentes grupos simétricos S_k, com $k > 0$.
Para conseguir isto começamos por desenvolver, de um modo resumido, a teoria de representação do grupo simétrico, e depois abordaremos a dualidade de Schur-Weyl por intermédio do Teorema do Duplo Centralizador, à semelhança do que é feito em [13].
No último capítulo da tese, apresentamos uma interpretação combinatória da dualidade de Schur-Weyl, relacionando-a com caminhos aleatórios em determinados grafos, conhecidos por *grafos de representação* associados a uma representação dada de um grupo G. Esta abordagem combinatória é baseada no artigo [2], publicado recentemente.

Palavras-chave: grupo; representação; grupo simétrico; grupo geral linear; dualidade de Schur-Weyl; grafo; passeio aleatório; função geradora.

Abstract

Group representation theory is one of the most central and far reaching branches of group theory, with applications in Physics, Computer Science, Chemistry and most areas of Mathematics, including combinatorics, topology and algebraic geometry. After revising, in a self-contained fashion, the essentials of the representation theory of finite groups over the complex numbers, we focus our attention on the ideas of Schur-Weyl duality, a method devised by I. Schur and popularized by H. Weyl in his book [14] to obtain the finite dimensional irreducible *polynomial* representations of the infinite group $\mathrm{GL}(V)$ of invertible linear transformations on the finite-dimensional vector space V, in terms of the irreducible representations of the family of symmetric groups S_k, for $k > 0$.

To achieve this, we first develop, in a concise way, the representation theory of the symmetric groups over the complex numbers, and then approach Schur-Weyl duality via the Double Centralizer Theorem, in the spirit of [13].

In the last chapter of the thesis, we present an interpretation of Schur-Weyl duality in terms of the combinatorics of random walks on certain graphs, known as the *representation graphs* associated to a chosen representation of a group G. This is based on the recent paper [2].

Keywords: group; representation; symmetric group; general linear group; Schur-Weyl duality; graph; random walk; generating function.

Conteúdo

Lista de Tabelas

Lista de Figuras

Capítulo 1

Introdução

O conceito de *grupo* surge naturalmente no estudo das simetrias que são encontradas nos mais variados ramos da matemática, e não só, tendo também diversas aplicações na física. Exemplos de grupos conhecidos são os grupos das isometrias de figuras geométricas ou o grupo das permutações dos elementos de um conjunto. Frequentemente, diz-se que um grupo está a *actuar* num determinado espaço, e mediante certas condições, dizemos que este espaço é um *módulo* ou até uma *representação* do grupo. A teoria da representação foca-se no estudo destas representações, que são acções de grupo com propriedades adicionais, utilizando técnicas da álgebra linear.
O tema central desta tese é a dualidade de Schur-Weyl. Este método, desenvolvido por I. Schur, permite relacionar as representações de uma par *dual* de álgebras (incluindo o caso das álgebras de grupo) que se centralizam mutuamente na sua acção numa representação comum. Originalmente, I. Schur considerou a acção diagonal do grupo geral linear $\mathrm{GL}(V)$ no espaço vectorial $E = V^{\otimes k}$. Por sua vez, o grupo simétrico S_k também actua em E, permutando os factores no produto tensorial. Estas duas acções comutam e de facto a álgebra que centraliza a acção de $\mathrm{GL}(V)$ em E é a imagem homomorfa da álgebra de grupo de S_k determinada pela respectiva acção deste grupo (ver o Teorema 5.3). Isto implica, por via de um resultado fundamental que designamos por Teorema do Duplo Centralizador (ver o Teorema 5.2), que a decomposição de E em soma de representações irredutíveis para o grupo simétrico S_k, determina também a decomposição de E em soma de representações irredutíveis para o grupo geral linear $\mathrm{GL}(V)$. Fazendo variar o inteiro positivo k, considerando assim globalmente as representações irredutíveis dos vários grupos simétricos S_k, com $k > 0$, obtém-se um conjunto infinito de representações irredutíveis de dimensão finita de $\mathrm{GL}(V)$, e simultaneamente uma decomposição do produto tensorial $E = V^{\otimes k}$ em soma de representações irredutíveis deste grupo, generalizando a decomposição conhecida de $V \otimes V$ na soma dos espaços dos tensores simétricos e dos tensores alternados.
O cenário descrito acima corresponde ao caso clássico da dualidade de Schur-Weyl. Se $\dim V = n$, então podemos ver o grupo simétrico S_n como um subgrupo de $\mathrm{GL}(V)$, e

assim considerar a álgebra centralizadora da acção (diagonal) de S_n em $V^{\otimes k}$. Esta álgebra centralizadora é designada por *álgebra das partições* (*partition algebra*, em inglês) e a álgebra do grupo simétrico S_k pode ser vista como uma imagem homomorfa desta álgebra. Temos então um novo par de álgebras em dualidade, cujas respectivas teorias de representação estão relacionadas por via do Teorema do Duplo Centralizador. Pretendemos com este exemplo ilustrar a forma como as ideias iniciais de Schur podem ser estendidas a novos pares de álgebras. Este exemplo em particular foi usado recentemente em [3] para resolver um problema aberto em teoria de representação combinatória relacionado com a decomposição do produto tensorial de duas representações irredutíveis de um grupo simétrico.

No último capítulo desta tese apresentamos um outro aspecto, cujo desenvolvimento é ainda mais recente (ver [2]), da dualidade de Schur-Weyl. Trata-se de relacionar esta dualidade com aspectos combinatórios relacionados com passeios aleatórios em grafos. Mais especificamente, dado um grupo finito G e uma representação complexa V de G, podemos formar um grafo (em geral orientado) $\mathcal{R}_V(G)$ cujos vértices estão indexados às classes de isomorfismo das representações irredutíveis de G e cujas arestas são determinadas pela decomposição de produtos tensoriais das representações irredutíveis de G com V. Neste contexto, a dualidade de Schur-Weyl permite relacionar o número de passeios no grafo $\mathcal{R}_V(G)$ com as dimensões das representações irredutíveis das álgebras centralizadoras da ação de G nas potências tensoriais de V. Assim, apresentamos no Capítulo 6 o artigo [2] em que o grupo G e a representação V são escolhidas de forma a que o grafo $\mathcal{R}_V(G)$ seja o *hipercubo*, o grafo cujos vértices são as sequências binárias em $\{0,1\}^n$ e cuja relação de adjacência é dada pela *distância de Hamming*.

A tese está organizada da seguinte forma. No Capítulo 2 são introduzidas as noções de acção e representação de grupos e álgebras. No caso dos grupos finitos, são definidas várias construções importantes de representações e é provado o Teorema de Maschke. No Capítulo 3 é introduzida a teoria dos caracteres complexos de grupos finitos e a tabela de caracteres. É visto que o carácter de uma representação complexa de um grupo finito determina essa representação e que o conjunto dos caracteres das representações irredutíveis forma uma base ortonormada do espaço das funções de classe no grupo. É também apresentada uma prova de um resultado de Burnside e Molien que diz que as potências tensoriais de uma representação fiel do grupo contêm todas as representações irredutíveis desse grupo. Este resultado é aplicado no Capítulo 6 para concluir que nesse caso o grafo $\mathcal{R}_V(G)$ é conexo.

Com o intuito de apresentar a dualidade clássica de Schur-Weyl entre $\mathrm{GL}(V)$ e os grupos simétricos, desenvolvemos no Capítulo 4 a teoria das representações complexas dos grupos simétricos. Em particular, enunciamos (sem provar) a Fórmula de Frobenius, que usamos para demonstrar a fórmula *hook-length* que dá a dimensão das respresentações irredutíveis dos grupos simétricos. Finalmente, no Capítulo 5 fazemos uma introdução rápida à teoria de representação das álgebras semisimpes e ao Teorema de Wedderburn, para podermos enunciar e demonstrar o Teorema do Duplo Centralizador e explicitar a dualidade clássica de Schur-Weyl. Como referimos acima, no Capítulo 6 apresentamos o artigo [2], explorando uma nova vertente combinatória da dualidade de Schur-Weyl.

Capítulo 2

Conceitos Iniciais

Neste capítulo procuramos definir diversos conceitos relacionados com representações, como por exemplo os conceitos de acção, de módulo ou de representação, que serão referidos com muita frequência no decorrer desta tese. Este capítulo também toma como objectivo estabelecer notação que será usada no decorrer da tese. Numa fase adiantada do capítulo, procuramos provar alguns resultados basilares da teoria da representação.
Mais detalhes sobre grupos, acções e representações podem ser consultados por exemplo em [1].

2.1 Definições e Resultados Iniciais

Os primeiros termos a definir são os que foram referidos acima, mais concretamente o que é uma *acção*, um *módulo* e uma *representação*.

Definição 2.1. Dizemos que um semigrupo G actua (à esquerda) num conjunto X se tivermos uma operação binária

$$\begin{aligned} \cdot : G \times X &\to X \\ (g, x) &\mapsto g \cdot x \end{aligned}$$

com as seguintes propriedades:

- Para todo o $g, h \in G$ e $x \in X$, temos que $g \cdot (h \cdot x) = gh \cdot x$;
- Se o semigrupo admite elemento neutro e então para todo o $x \in X$, temos que $e \cdot x = x$.

Nestas condições dizemos que G actua em X. Na maioria das situações vamos ter que G é um grupo ou um anel. No caso de G ser um anel, a acção tem de ter estas propriedades apenas para a multiplicação. Como exemplo do que é uma acção, consideremos os dois exemplos seguintes.

Exemplo 2.1. *Consideremos o grupo aditivo $\mathbb{Z}$. Definimos a seguinte operação binária:*

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{Z} \times \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ (n, x) &\mapsto n + x \end{aligned}$$

Facilmente se verifica que esta operação obedece às condições para ser efectivamente uma acção.

Exemplo 2.2. *Em contraste, vendo $\mathbb{Z}$ como um monóide multiplicativo, ou como um anel, temos que*

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{Z} \times \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ (n, x) &\mapsto nx \end{aligned}$$

também determina uma acção em $\mathbb{R}$.

Tendo o conceito de acção em mente, podemos falar do conceito de módulo:

Definição 2.2. Um módulo (à esquerda) para um grupo G, ou um G-módulo, é um grupo abeliano X, cuja operação denotemos por $+$, tal que G *actua* em X com a seguinte propriedade adicional:

- Para todo o $g \in G$ e $x, y \in X$, temos que $g \cdot (x + y) = g \cdot x + g \cdot y$.

Ao dizermos que X é um módulo de G temos sempre de dizer, ou no mínimo subentender, como é que G actua em X.
Esta definição é mais comummente feita para o caso em que G é um anel, e neste caso temos de ter ainda a propriedade:

- Para todo o $g, h \in G$ e $x \in X$, temos que $(g + h) \cdot x = g \cdot x + h \cdot x$.

Por exemplo, o grupo abeliano $\mathbb{Z}$ é um G-módulo para qualquer grupo G, considerando a acção *trivial* $g \cdot n = n$ para todo o $g \in G$ e $n \in \mathbb{Z}$.
Todo o anel R é um módulo sobre si próprio se a acção for definida pelo produto em R, i.e., para todo $r, s \in R$ temos que $r \cdot s = rs \in R$. É costume usar a notação ${}_RR$ para denotar o R-módulo R com esta acção, que é designado por R-módulo regular (à esquerda).
Nos exemplos 2.1 e 2.2 consideremos $\mathbb{R}$ munido com a operação aditiva usual. No primeiro caso temos que $\mathbb{R}$, mediante a acção dada, não é um módulo de $\mathbb{Z}$, pois isto obrigaria a $n + (x + y) = n + x + n + y$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ e $x, y \in \mathbb{R}$, o que é claramente falso. Já no segundo caso, devido ao facto da multiplicação em $\mathbb{R}$ gozar da propriedade distributiva relativamente à adição, temos de facto que $\mathbb{R}$ é um $\mathbb{Z}$-módulo.
Finalmente podemos definir uma representação.

Definição 2.3. Uma representação de um grupo (ou anel) G é um espaço vectorial V, sobre um corpo $\mathbb{F}$, tal que V é um G-módulo com a seguinte propriedade adicional:

- Para todo o $g \in G$, $v \in V$ e $\lambda \in \mathbb{F}$, temos que $g \cdot (\lambda v) = \lambda(g \cdot v)$.

Se G for um grupo, V ser uma representação de G é o mesmo que dizer que existe um homomorfismo de grupos $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$, onde $\mathrm{GL}(V)$ é o grupo geral linear sobre V, i.e., o grupo dos automorfismos lineares de V. Por outro lado, se G for um anel, esta definição equivale a existir um homomorfismo de anéis $\rho : G \to \mathrm{End}(V)$ onde $\mathrm{End}(V)$ denota o conjunto das transformações lineares de V em V.
Em ambos os casos, o homomorfismo tem de obedecer a $g \cdot v = \rho(g)(v)$, para todo o $g \in G$ e $v \in V$.
Ao dizermos que V é uma representação de G estamos a subentender o homomorfismo ρ. Em alguns contextos, pode-se chamar de representação ao homomorfismo ρ.

Vejamos agora a definição de *álgebra de grupo*. Estas estruturas terão muita importância no decorrer desta tese.

Definição 2.4. Sejam G um grupo e $\mathbb{F}$ um corpo. A álgebra de grupo $\mathbb{F}G$ é um espaço vectorial que admite como base os diferente elementos de G. Esta estrutura é um anel, onde a operação aditiva é herdada do espaço vectorial e a operação multiplicativa é obtida por bilinearização da operação de G.

Vamos então ver alguns exemplos de representações de um grupo.

Exemplo 2.3. *Seja G um grupo e V um espaço vectorial. Os exemplos seguintes são bastantes conhecidos, sendo alguns revisitados mais tarde.*

- *Seja V um espaço vectorial arbitrário. Então V é uma representação de G para a acção dada por $g \cdot v = v$, para todo o $g \in G$ e $v \in V$; no caso em que* $\dim V = 1$, *esta representação designa-se por* representação trivial.

- *A representação regular passa por considerar o caso particular em que V é a álgebra de grupo $\mathbb{C}G$, e $\rho(g)(h) = gh$, para todo $g \in G$ e $h \in \mathbb{F}G$;*

- *O grupo simétrico S_n será muito estudado nesta tese. S_n actua em $\mathbb{C}^n$ do seguinte modo: $\sigma e_i = e_{\sigma(i)}$, onde $\sigma \in S_n$ e e_i é o i-ésimo elemento da base canónica de $\mathbb{C}^n$.*

Usualmente abrevia-se $g \cdot v$ para gv e $\rho(g)(v)$ para $\rho(g)v$.
Daqui em diante vamos sempre considerar G um grupo finito e V um espaço vectorial sobre $\mathbb{C}$ de dimensão finita.

Definição 2.5. Seja G um grupo ou um anel. Sejam V e W duas representações de G. Diz-se que $\varphi : V \to W$ é um G-homomorfismo (ou um homomorfismo de G-módulos) se for um homomorfismo de espaços vectoriais e $\varphi(gv) = g\varphi(v)$ para todo $g \in G$ e $v \in V$.
Se φ for bijectivo, estamos perante um isomorfismo de G-módulos.

O espaço dos homomorfismos (lineares) de V para W é denotado por $\mathrm{Hom}(V, W)$ (ou por $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, W)$), e o dos G-homomorfismos é denotado por $\mathrm{Hom}_G(V, W)$. Se V for igual a W, podemos utilizar a notação $\mathrm{End}(V)$. Analogamente usamos a notação $\mathrm{End}_G(V)$ para denotar o espaço de G-endomorfismos.
Se φ é um G-homomorfismo podemos facilmente ver que $\ker\varphi$ e $\mathrm{Im}\varphi$ são invariantes por g, para todo o $g \in G$, isto é, para todo $g \in G$ tem-se que $g \cdot \ker\varphi \subseteq \ker\varphi$ e $g \cdot \mathrm{Im}\varphi \subseteq \mathrm{Im}\varphi$.

Definição 2.6. Seja V uma representação de G. Diz-se que W é uma subrepresentação de V se $W \subseteq V$ é um subespaço e W for invariante por g, para todo $g \in G$, i.e., $g \cdot W \subseteq W$ para todo $g \in G$.

Exemplo 2.4. *Seja G um grupo e consideremos a representação regular $\mathbb{C}G$. Seja $x \in \mathbb{C}G$. Consideremos o conjunto $\mathbb{C}Gx = \{yx \mid y \in \mathbb{C}G\} \subseteq \mathbb{C}G$. Temos então que $\mathbb{C}Gx$ é uma subrepresentação de $\mathbb{C}G$, uma vez é um espaço vectorial e que para todo o $g \in G$ e $y \in \mathbb{C}G$ temos que*

$$g(yx) = gyx \in \mathbb{C}Gx.$$

Se $\varphi : V \to W$ é um G-homomorfismo de duas representações V e W então $\ker\varphi$ é uma subrepresentação de V e $\mathrm{Im}\varphi$ é uma subrepresentação de W.

Definição 2.7. Uma representação $V \neq \{0\}$ diz-se irredutível se não contiver subrepresentações próprias. Isto é, as suas únicas subrepresentações são a própria e o espaço nulo.

Sejam V e W representações relativamente a um grupo G. Como espaço vectorial, podemos falar dos espaços formados pela soma directa de ambos e pelo produto tensorial (relativamente ao corpo $\mathbb{C}$) de ambos. Aproveitamos também para definir o espaço dual de V, denotado por $V^\star$, que corresponde ao espaço das aplicações lineares de V em $\mathbb{C}$. Este espaço dual é também um espaço vectorial.
Vamos então agora definir a acção de G em cada um destes espaços. Após definir a acção, podemos ver cada um destes espaços como representações de G.

- Fixemos $u \in V \oplus W$. Como estamos numa soma directa, existem $v \in V$ e $w \in W$ únicos tais que $u = v + w$. Temos então que $gu = g(v + w) = gv + gw$, para todo o $g \in G$.

- Seja $u = v \otimes w \in V \otimes W$. Definimos $g(v \otimes w) := gv \otimes gw$, para todo o $g \in G$. Isto é suficiente para definir como g actua em $V \otimes W$, pois este conjunto é linearmente gerado por elementos da forma $v \otimes w$ com $v \in V$ e $w \in W$ e a acção de g é linear por definição.

- Seja $f \in V^\star$. Então $f : V \to \mathbb{C}$ é uma aplicação linear. Definimos $g \cdot f := f \circ g^{-1}$, para todo o $g \in G$. Sejam $g, h \in G$. Esta definição da acção é para forçar a propriedade $(gh) \cdot f = g \cdot (h \cdot f)$, que não teríamos se a definição da acção fosse $g \cdot f := f \circ g$, o que seria mais intuitivo de fazer, pois isto obrigaria a que $gh = hg$, o que só acontece quando G é abeliano. Com a definição correcta da acção, temos que esta propriedade implica $(gh)^{-1} = h^{-1}g^{-1}$, o que é sempre verdade.

O resultado seguinte mostra que se V é uma representação de um grupo (finito) G e W uma subrepresentação de V, então existe uma subrepresentação de V que é um complemento, como espaço vectorial, de W em V.

Proposição 2.1. *Seja V uma representação relativamente a um grupo G e $W \subseteq V$ uma subrepresentação. Então existe W' tal que W' é subrepresentação de V e $V = W \oplus W'$.*

Demonstração. Seja $U \subseteq V$ um subespaço tal que $V = W \oplus U$. Seja $\pi : V \to W$ a projecção de V em W relativamente à decomposição $V = W \oplus U$. Notemos que esta projecção não tem que ser um G-homomorfismo, devido ao facto de U não ter que ser uma representação de G.
Seja $\varphi : V \to W$ definido pela aplicação linear

$$\varphi(v) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g\pi(g^{-1}v),$$

para todo o $v \in V$. Notemos que $\varphi|_W = \mathrm{Id}_W$, pois W é uma representação. Em particular, $\mathrm{Im}\varphi = W$. Vejamos ainda que φ é um G-homomorfismo. Fixemos $v \in V$ e $h \in G$:

$$\begin{aligned}\varphi(hv) &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g\pi(g^{-1}hv) \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{g' \in G} hg'\pi(g'^{-1}v) \\ &= h\varphi(v),\end{aligned}$$

onde $g' \in G$ tal que $g'^{-1} := g^{-1}h$. Notemos que fazendo g percorrar todos os elementos de G, como h é fixo, g' vai também tomar todos os valores de G.
Seja $W' = \ker \varphi$.
Para todo $v \in V$ temos que $v = (v - \varphi(v)) + \varphi(v)$, onde $v - \varphi(v) \in W'$ e $\varphi(v) \in W$, e que $W \cap W' = \{0\}$. Logo encontramos uma subrepresentação W' de V tal que $V = W \oplus W'$. □

Nota.

1. A projecção φ tem duas propriedades muito importantes, que são $\varphi|_W = \mathrm{Id}_W$ e $\mathrm{Im}\varphi = W$. A partir de agora, sempre que falamos em projecção numa subrepresentação W, estaremos a referir-nos a um G-homomorfismo φ com estas propriedades.

2. No caso particular em que o U no início da demonstração for também uma representação, temos que π é um G-homomorfismo.

Corolário 2.1. *Toda a representação de dimensão finita de um grupo finito é soma directa de representações irredutíveis.*

Este corolário é um caso particular do *Teorema de Maschke*, pois só incide sobre caso particular em que a representação tem dimensão finita. No capítulo 5 veremos uma versão melhorada deste resultado.
Temos então que toda a representação de um grupo finito se escreve como soma directa de representações irredutíveis, podemos ver que esta soma é única a menos de isomorfismo e da permutação das parcelas. Para ajudar nessa prova será necessário o seguinte lema, ao qual recorreremos com frequência

Lema 2.1 (Lema de Schur)**.** *Seja G um grupo. Sejam V e W representações irredutíveis de G e $\phi : V \to W$ um G-homomorfismo. Então:*

1. *Se $\phi \neq 0$ então ϕ é um isomorfismo;*

2. *Se $V = W$ então $\varphi = \lambda Id$ para algum $\lambda \in \mathbb{C}$. Logo $End_G(V) = \mathbb{C}$.*

Demonstração.

1. Uma vez que $\ker\varphi$ é uma subrepresentação de V temos que este é o espaço nulo ou o próprio V, obrigando φ a ser injectiva ou a função nula, respectivamente. No primeiro caso, temos então que $\mathrm{Im}\varphi \neq 0$, e como W é uma representação irredutível, isto implica que $\mathrm{Im}\varphi = W$, o que obriga φ a ser um isomorfismo.

2. Se $V = W$, definindo uma base de V, podemos olhar para φ como sendo uma matriz de entradas em $\mathbb{C}$, e assim sendo existe $\lambda \in \mathbb{C}$ que é valor próprio de φ. Notemos que os valores próprios não dependem da base escolhida. Se pegarmos na função $\phi - \lambda\mathrm{Id}$, que é um G-homomorfismo, como esta tem núcleo não nulo, pela primeira parte do lema teremos que $\varphi - \lambda\mathrm{Id} = 0$, podendo-se concluir daqui que $\varphi = \lambda\mathrm{Id}$. Isto implica ainda que $\mathrm{End}_G(V) = \mathbb{C}$.

$\square$

Seja $k \geq 0$. Introduz-se agora a notação $V^{\oplus k} := V \oplus \cdots \oplus V$, onde V é somado k vezes. Convencionamos que $V^{\oplus 0} = \{0\}$. Analogamente também se define $V^{\otimes k}$, para $k \geq 1$.

Proposição 2.2. *Seja V uma representação de G. Então*

$$V \cong V_1^{\oplus a_1} \oplus \cdots \oplus V_k^{\oplus a_k},$$

onde $k \geq 0$, $V_1, \ldots, V_k$ são representações irredutíveis não isomorfas duas-a-duas e $a_i > 0$ são as suas multiplicidades. Esta escrita é única a menos de isomorfismo e da permutação das parcelas.

Demonstração. Já temos provada a existência de representações irredutíveis $U_1, \ldots, U_m$ tais que $V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_m$. Agrupamos agora estas representações nas suas respectivas classes de isomorfismo, digamos $V_1, \ldots V_k$, e obtemos

$$V \cong V_1^{\oplus a_1} \oplus \cdots \oplus V_k^{\oplus a_k}.$$

Logo só falta mostrar a unicidade desta decomposição, nos termos do enunciado.
Supomos então que temos:

$$V \cong V_1^{\oplus a_1} \oplus \cdots \oplus V_k^{\oplus a_k} \cong W_1^{\oplus b_1} \oplus \cdots \oplus W_\ell^{\oplus b_\ell}$$

Consideremos uma representação irredutível V_i. Para cada $1 \leq j \leq \ell$ e $1 \leq n \leq b_j$, definimos $\pi_{j,n} : V_i \to W_j$, a projecção na n-ésima componente de $W_j \oplus \cdots \oplus W_j$ (somado b_j vezes).
Temos então que existem j, n tais que $\pi_{j,n} \neq 0$. Para este j, graças ao Lema de Schur, temos que $V_i \cong W_j$.
Isto prova que para o todo o i existe um j tal que $V_i \cong W_j$. Analogamente, podemos dizer o recíproco. Logo temos que o conjunto dos V_i's é igual ao conjunto dos W_j's, a menos de isomorfismo. Temos então, após um possível reordenação dos inteiros b_j, que

$$V \cong V_1^{\oplus a_1} \oplus \cdots \oplus V_k^{\oplus a_k} \cong V_1^{\oplus b_1} \oplus \cdots \oplus V_k^{\oplus b_k}$$

Só falta ver que as multiplicidades são as mesmas, o que decorre do seguinte Lema, já que $a_i = \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_G(V_i, V) = b_i$. □

Lema 2.2. *Seja V uma representação de G tal que*

$$V \cong V_1^{\oplus a_1} \oplus \cdots \oplus V_k^{\oplus a_k},$$

onde $k \geq 0$, $V_1, \ldots, V_k$ são representações irredutíveis não isomorfas duas-a-duas. Então

$$a_i = \dim_{\mathbb{C}} Hom_G(V_i, V).$$

Demonstração. Como $V \cong V_1^{\oplus a_1} \oplus \ldots, V_k^{\oplus a_k}$, temos que

$$\mathrm{Hom}_G(V_i, V) \cong \mathrm{Hom}_G(V_i, \bigoplus_{j=1}^{k} V_j^{\oplus a_j})$$

Queremos agora ver que $\mathrm{Hom}_G(V_i, \bigoplus_{j=1}^{k} V_j^{\oplus a_j})$ e $\bigoplus_{j=1}^{k} \mathrm{Hom}_G(V_i, V_j^{\oplus a_j})$ são isomorfismos como espaços vectoriais. Comecemos por considerar a função:

$$\begin{aligned}\pi : \mathrm{Hom}_G(V_i, \bigoplus_{j=1}^{k} V_j^{\oplus a_j}) &\to \bigoplus_{j=1}^{k} \mathrm{Hom}_G(V_i, V_j^{\oplus a_j})\\ f &\mapsto (\pi_1 \circ f, \ldots, \pi_k \circ f),\end{aligned}$$

onde, $\pi_j : \bigoplus_{i=1}^{k} V_i^{\oplus a_i} \to V_j^{\oplus a_j}$ é a projecção.
A inversa desta função π é:

$$\begin{aligned}\pi^{-1} : \bigoplus_{j=1}^{k} \mathrm{Hom}_G(V_i, V_j^{\oplus a_j}) &\to \mathrm{Hom}_G(V_i, \bigoplus_{j=1}^{k} V_j^{\oplus a_j})\\ (f_1, \ldots, f_k) &\mapsto f,\end{aligned}$$

onde $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_k(x))$, para todo o $x \in V_i$
Devido ao lema de Schur, temos que $\mathrm{Hom}_G(V_i, V_j^{\oplus a_j}) = 0$ se $i \neq j$, pois $V_i \ncong V_j$. Logo $\bigoplus_{j=1}^{k} \mathrm{Hom}_G(V_i, V_j^{\oplus a_j}) \cong \mathrm{Hom}_G(V_i, V_i^{\oplus a_i})$.
Podemos agora ver que

$$\mathrm{Hom}_G(V_i, V_i^{\oplus a_i}) \simeq M_{a_i \times 1}(End_G(V_i)).$$

Para provar isto basta ver que, por um lado, dado $f \in \mathrm{Hom}_G(V_i, V_i^{\oplus a_i})$ podemos associar-lhe o vector coluna $(\pi_1 \circ f, \ldots, \pi_{a_i} \circ f)^t \in M_{a_i \times 1}(\mathrm{End}_G(V_i))$, onde $\pi_k : V_i^{\oplus a_i} \to V_i$ é a projecção na k-ésima coordenada. Reciprocamente, podemos definir uma aplicação inversa que atribui ao vector $(f_1, \ldots, f_{a_i})^t \in M_{a_i \times 1}(\mathrm{End}_G(V_i))$ a função $f : V_i \to V_i^{\oplus a_i}$ definida por $f(v) = (f_1(v), \ldots, f_{a_i}(v))$.
Pelo Lema de Schur, podemos também dizer que $\mathrm{End}_G(V_i) \cong \mathbb{C}$.
Logo $\dim \mathrm{Hom}_G(V_i, V) = \dim M_{a_i \times 1}(\mathbb{C}) = a_i$ □

Definição 2.8. Nas condições do Lema anterior, ao número a_i, que apenas depende da representação irredutível V_i e da representação V, chamamos de multiplicidade de V_i em V.

O resultado seguinte admite um corolário que é muito importante no estudo do *carácter* de uma representação de um grupo e das suas propriedades, algo que será feito no capítulo seguinte.

Proposição 2.3. *Se G é um grupo abeliano e V uma representação irredutível de G então V tem dimensão* 1.

Demonstração. Seja G um grupo abeliano e V uma representação irredutível. Seja $g \in G$ um elemento genérico. A operação induzida por g em V é dada por

$$\begin{aligned} \rho(g) : V &\to V \\ v &\mapsto gv. \end{aligned}$$

Como G é abeliano, esta operação é um G-homomorfismo, pois para todo o $h \in G$ temos que $\rho(g)(hv) = g(hv) = (gh)v = (hg)v = h(gv) = h\rho(g)(v)$.
Pelo Lema de Schur, temos então que $\rho(g) = \lambda \mathrm{Id}$, para algum $\lambda \in \mathbb{C}$. Logo, todos os elementos de G actuam em V como uma multiplicação por um mesmo escalar, logo todo o subespaço de V será uma subrepresentação de G.
Mas V não admite subrepresentações próprias não-nulas, como tal V tem de ter dimensão 1. □

Corolário 2.2. *Seja V uma representação de G e $g \in G$. Então V admite uma base de vectores próprios para a acção de g.*

Demonstração. Consideremos o grupo $G' = \langle g \rangle$, o subgrupo abeliano de G gerado por g. Como V é representação de G, também é de G', onde as acções dos elementos de G' são as induzidas como elementos de G.
Como G' é abeliano, V pode ser escrito como soma directa de subespaços de dimensão 1, que são invariantes para a acção de G'. Assim cada elemento não-nulo de um desses subespaços é um vector próprio para a acção de g. Logo V admite uma base de vectores próprios para a acção de g.

□

Capítulo 3

Caracteres

Nesta capítulo vamos definir o conceito de *carácter* de uma representação, e ver algumas propriedades da função carácter. Vamos ver ainda alguns resultados que utilizam esta função. Estas e outras propriedades podem ser estudadas com mais detalhe em [1] ou [8].

3.1 Caracteres: Propriedades e Aplicações

Sendo uma representação V de um grupo G um espaço vectorial de dimensão finita, e vendo $g \in G$ como um automorfismo linear do espaço vectorial, faz sentido, após fixar uma base de V, identificar a acção de g com uma matriz, e assim sendo podemos falar do seu traço. Notemos que o traço de uma matriz não depende da escolha da base. Chegamos assim ao conceito de carácter:

Definição 3.1. Dados uma representação V de G e $g \in G$, o carácter de g relativamente a V, denotado por $\chi_V(g)$, é $\mathrm{tr}(\rho(g))$, onde ρ é o homomorfismo associado à representação V.

É comum usar a notação $g|_V$ para dizer que estamos a olhar para a acção de g em V.

Nota.

- $\chi_V(hgh^{-1}) = \chi_V(g)$, pois $\chi_V(hgh^{-1}) = \mathrm{tr}(\rho(hgh^{-1})) = \mathrm{tr}(\rho(h)\rho(g)\rho(h^{-1})) = \mathrm{tr}(\rho(g))$. Notemos que aqui usamos a propriedade $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.

- $\chi_V(e) = \dim V$, onde e é o elemento neutro de G. Isto deve-se ao facto de $\rho(e) = \mathrm{Id}_V$.

Temos então de χ_V é constante nas classes de conjugação de G. Podemos portanto considerar χ_V como sendo um vector com tantas entradas como o número de classes de conjugação de G e a cada entrada atribui-se o carácter de V de um qualquer elemento da respectiva classe de conjugação. A este vector podemos simplesmente chamar carácter de V.

Proposição 3.1. *Sejam V e W representações de G. Então:*

1. $\chi_{V\oplus W} = \chi_V + \chi_W$

2. $\chi_{V\otimes W} = \chi_V \times \chi_W$

3. $\chi_{V^\star} = \overline{\chi_V}$

Demonstração. Fixemos $g \in G$, e vamos olhar para a acção deste elemento em V e em W. Seja $v_1, \dots, v_n$ uma base de vectores próprios de V de $g|_V$ associados aos valores próprios $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ e seja $w_1, \dots, w_m$ uma base de vectores próprios de W de $g|_W$ associados aos valores próprios $\mu_1, \dots, \mu_m$.

1. Notemos que $\{v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_m\}$ forma uma base de vectores próprios de $V \oplus W$ associada aos vectores próprios $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \mu_1, \dots, \mu_m$.

   Logo $\mathrm{tr}(g|_{V\oplus W}) = \mathrm{tr}(g|_V) + \mathrm{tr}(g|_W)$. Logo $\chi_{V\oplus W} = \chi_V + \chi_W$.

2. Notemos que os vectores da forma $v_i \otimes w_j$, com $i \in \{1, \dots, n\}$ e $j \in \{1, \dots, m\}$, formam uma base de vectores próprios de $V \otimes W$, uma vez que $g(v_i \otimes w_j) = gv_i \otimes gw_j = \lambda_i v_i \otimes \mu_j w_j = \lambda_i \mu_j (v_i \otimes w_j)$.

   Logo $\mathrm{tr}(g|_{V\otimes W}) = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i\right)\left(\sum\limits_{j=1}^{m} \mu_j\right) = \mathrm{tr}(g|_V) \times \mathrm{tr}(g|_W)$. Logo $\chi_{V\otimes W} = \chi_V \times \chi_W$.

3. Seja $\{v_1^\star, \dots, v_n^\star\}$ a base dual de $V^\star$. Temos então que $v_i^\star(v_j) = \delta_{i,j}$.

   Relembremos que se $f \in V^\star$ e $g \in G$, temos que $g \cdot f = f \circ g^{-1}$.

   Vejamos que $v_i^\star$ é vector próprio de g, pois $g \cdot v_i^\star(v_j) = v_i^\star(g^{-1}v_j) = \lambda_i^{-1}\delta_{i,j}$, logo $g \cdot v_i^\star = \lambda_i^{-1} v_i^\star$.

   Finalmente, como G é finito, existe k tal que $g^k = e$, logo λ_i tem que ser uma raiz da unidade. Logo $\lambda_i^{-1} = \overline{\lambda_i}$.

   Logo $\mathrm{tr}(g|_{V^\star}) = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i^{-1} = \sum\limits_{i=1}^{n} \overline{\lambda_i} = \overline{\mathrm{tr}(g|_V)}$. Logo $\chi_{V^*} = \overline{\chi_V}$.

□

Seja G um grupo finito. Definimos o espaço vectorial das funções $G \to \mathbb{C}$ que são constantes nas classes de conjugação. A este tipo de funções chamemos de funções de classe. Notemos que o carácter de uma representação é uma função nestas condições. Neste espaço vectorial podemos definir o seguinte produto interno:

Definição 3.2. Seja G um grupo finito e sejam α e β duas funções de classe. O produto interno entre eles é dado por:

$$(\alpha, \beta) = \frac{1}{|G|} \sum_{g\in G} \alpha(g)\overline{\beta(g)}. \tag{3.1}$$

Sejam V e W representações de G. Para o próximo lema precisamos de definir como é que $g \in G$ actua em $\mathrm{Hom}(V, W)$. Seja $f \in \mathrm{Hom}(V, W)$, vamos definir $g \cdot f := g|_W \circ f \circ g^{-1}|_V$. Nestas condições temos que $\mathrm{Hom}(V, W)$ é uma representação de G.

Lema 3.1. *Sejam V e W representações de G. Temos que $V \otimes W^\star \cong Hom(W, V)$ como G-módulos.*

Demonstração. Comecemos por considerar a seguinte função

$$\begin{aligned} \Phi : V \otimes W^\star &\to \mathrm{Hom}(W, V) \\ (v, f) &\mapsto \Phi_{v,f}, \end{aligned}$$

onde $\Phi_{v,f} : W \to V$ é tal que $\Phi_{v,f}(w) = f(w)v$.
Como a função $\hat{\Phi} : V \times W^\star \to \mathrm{Hom}(W, V)$ definida por $\hat{\Phi}(v, f) = \Phi_{v,f}$, para todo o $v \in V$ e $f \in W^\star$, é bilinear, temos que Φ é um homomorfismo de espaços vectoriais.
Sejam $v_1, \ldots, v_n$ uma base de V, $w_1, \ldots, w_m$ uma base de W, $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ a base dual de $W^\star$, tal que $\alpha_i(w_j) = \delta_{i,j}$.
Seja $\phi \in \mathrm{Hom}(W, V)$ e seja $u_i = \phi(w_i)$, para todo o i entre 1 e m. Então $\phi = \Phi(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \otimes u_i)$ pois

$$\begin{aligned} \Phi(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \otimes u_i)(w_j) &= \sum_{i=1}^{m} \Phi_{u_i,\alpha_i}(w_j) \\ &= \sum_{i=1}^{m} \alpha_i(w_j) u_i \\ &= u_j, \end{aligned}$$

logo temos que Φ é sobrejectiva.
Como $\dim V \otimes W^\star = \dim V \dim W^\star = \dim V \dim W = \dim \mathrm{Hom}(W, V)$, temos que o domínio e a imagem de Φ têm ambos igual dimensão (finita) como espaços vectoriais. Logo, como Φ é sobrejectiva também tem de ser injectiva.
Resta só verificar que $\Phi(h(v \otimes f)) = h\Phi(f \otimes v)$, para todo o $h \in G$. Seja $w \in W$ genérico. Temos então que

$$\begin{aligned} \Phi(h(v \otimes f))(w) &= \Phi(hv \otimes f \circ h^{-1})(w) \\ &= f \circ h^{-1}(w)hv = h(f \circ h^{-1}(w)v) \\ &= h\Phi_{v,f}(h^{-1}w) \\ &= (h \cdot \Phi(v \otimes f))(w). \end{aligned}$$

□

A proposição seguinte, juntamente com os seus corolários, estabelecem um conjunto de resultados sobre os caracteres das representações irredutíveis de um grupo que não só facilita a utilização da função carácter como ajuda a explicar a importância desta ferramenta.

Proposição 3.2. *Os caracteres das representações irredutíveis são ortonormais no espaço das funções de classe de $G \to \mathbb{C}$, relativamente ao produto interno definido.*

Demonstração. Sejam V e W duas representações irredutíveis.
Usando os resultados atrás visto e a linearidade da função traço, podemos concluir que:

$$\begin{aligned}
(\chi_V, \chi_W) &= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_V(g)\overline{\chi_W(g)}\\
&= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_V(g)\,\chi_{W^*}(g)\\
&= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_{V\otimes W^*}(g)\\
&= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\mathrm{tr}(g|_{V\otimes W^*})\\
&= \mathrm{tr}\left(\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} g|_{V\otimes W^*}\right).
\end{aligned}$$

Dada uma representação U de G, definimos o espaço dos G-invariantes em U por

$$U^G = \{u \in U | gu = u \ \forall g \in G\} \subseteq U.$$

Definimos ainda $\phi_U = \frac{1}{|G|}\sum\limits_{g\in G} g|_U$. Notemos que esta função admite domínio U.
Seja $h \in G$. Notemos que aplicar h à esquerda (ou à direita) a todos os elementos de G é o mesmo que estar a permutar estes elementos, pois G é um grupo. Logo, para todo o $u \in U$, temos que

$$\begin{aligned}
\phi_U(hu) &= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} g(hu) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} gh(u)\\
&= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} g(u) = \phi_U(u)\\
&= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} hg(u) = h\phi_U(u).
\end{aligned}$$

Logo temos $\phi_U \in \mathrm{End}_G(U)$ e que $\mathrm{Im}\phi_U \subseteq U^G$, pois $\phi_U(hu) = h\phi_U(u) = \phi_U(u)$. Por definição de U^G, temos também também que $\phi_U|_{U^G} = \mathrm{Id}_{U^G}$. Logo ϕ_U é uma projecção de U em U^G. Em particular, $\mathrm{tr}\phi_U = \dim U^G$.
Temos então que

$$
\begin{aligned}
(\chi_V, \chi_W) &= \operatorname{tr}\left(\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} g|_{V\otimes W^*}\right) \\
&= \operatorname{tr}\phi_{V\otimes W^\star} \\
&= \dim((V\otimes W^\star)^G) \\
&= \dim((\operatorname{Hom}(W,V))^G).
\end{aligned}
$$

Notemos que se $\phi : W \to V$ é uma aplicação linear e $g \in G$, temos que

$$(g\cdot\phi)(w) = \phi(w) \Leftrightarrow g(\phi(g^{-1}w)) = \phi(w) \Leftrightarrow \phi(g^{-1}w) = g^{-1}\phi(w).$$

Logo $(\operatorname{Hom}(W,V))^G = \operatorname{Hom}_G(W,V)$.
Temos então que

$$
\begin{aligned}
(\chi_V, \chi_W) &= \dim \operatorname{Hom}_G(W,V) \\
&\overset{\textit{Lema de Schur}}{=} \begin{cases} 1 \text{ se } V\cong W \\ 0 \text{ se } V\ncong W \end{cases},
\end{aligned}
$$

o que conclui a demonstração. □

Corolário 3.1. *Seja G um grupo finito.*

1. *O número de classes de isomorfismo de representações irredutíveis de G é menor ou igual ao número de classes de conjugação de G.*

2. *Seja V uma representação de G. Então V é irredutível se e só se $(\chi_V, \chi_V) = 1$.*

3. *Seja V uma representação de G e consideremos a sua decomposição como soma de representações irredutíveis $V \cong V_1^{\oplus a_1} \oplus \cdots \oplus V_k^{\oplus a_k}$. Então $(\chi_V, \chi_{V_i}) = a_i = (\chi_{V_i}, \chi_V)$.*

4. *A classe de isomorfismo de cada representação é determinada pelo seu carácter.*

Demonstração.

1. Dado um conjunto de representações irredutíveis não isomorfas duas-a-duas temos que os caracteres destas são ortonormais no espaço das funções de classe, logo são linearmente independentes. Como a dimensão deste espaço corresponde ao número de classes de conjugação de G, temos então que não existem mais classes de isomorfismo de representações irredutíveis que classes de conjugação do grupo.

2. Seja $V = V_1^{\oplus a_1} \oplus \cdots \oplus V_k^{\oplus a_k}$ a decomposição de V como soma directa de representações irredutíveis, onde as representações irredutíveis V_i e V_j são isomorfas se e só se $i = j$. Temos então que $(\chi_V, \chi_V) = \sum_{i=1}^{k} |a_i|^2$. Para isto ser igual a 1, como cada um dos a_i é um inteiro não negativo, temos que todos os a_i têm de ser iguais a 0, excepto exactamente um, que tem de ser igual a 1. Logo a decomposição de V como soma directa de representações irredutíveis tem de ser $V = V_j$, logo V é uma representação irredutível. O recíproco é estabelecido na proposição 3.2.

3. Seja $V = V_1^{\oplus a_1} \oplus \cdots \oplus V_k^{\oplus a_k}$ como acima. Temos então que $(\chi_V, \chi_{V_i}) = a_i = (\chi_{V_i}, \chi_V)$, pois $(\chi_{V_i}, \chi_{V_j}) = \delta_{i\,j}$.

4. Se V e W são representações tais que $\chi_V = \chi_W$, então temos que para toda a representação irredutível V_i se tem que $(\chi_V, \chi_{V_i}) = (\chi_W, \chi_{V_i})$. Logo V_i tem igual multiplicidade em V e em W. Como isto é válido para todas as representações irredutíveis, temos que V e W têm que ser isomorfos.

□

Vimos que o número de classes de isomorfismo de representações irredutíveis é menor ou igual ao número de classes de conjugação. Vamos ver que isto é na realidade uma igualdade.

Proposição 3.3. *O número de classes de isomorfismo de representações irredutíveis é igual ao número de classes de conjugação.*

Demonstração. Suponhamos que o número de classes de isomorfismo de representações irredutíveis é menor que o número de classes de conjugação. Já foi visto anteriormente que não pode ser maior. Vamos assumir que existe uma função de classe não nula $\alpha : G \to \mathbb{C}$ tal que $(\alpha, \chi_V) = 0$ para toda a representação irredutível V. Isto implica que $(\alpha, \chi_W) = 0$ para toda a representação W de G, pois W é soma directa de representações irredutíveis.
Seja V uma representação irredutível e consideremos a aplicação linear $\phi_{\alpha,V} : V \to V$ definida por $\phi_{\alpha,V}(v) = \sum\limits_{g \in G} \alpha(g) g v$, para $v \in V$.
Temos então que:

$$\begin{aligned}
\phi_{\alpha,V}(hv) &= \sum_{g \in G} \alpha(g) g \cdot hv \\
&\overset{(1)}{=} \sum_{g \in G} \alpha(hgh^{-1}) hgh^{-1} \cdot hv \\
&= h \left(\sum_{g \in G} \alpha(hgh^{-1}) gv \right) \\
&\overset{(2)}{=} h \left(\sum_{g \in G} \alpha(g) gv \right) \\
&= h(\phi_{\alpha,V}(v))
\end{aligned}$$

onde a igualdade (1) se justifica porque se fixarmos $h \in G$ a função $f : G \to G$ definida por $f(g) = hgh^{-1}$, para todo o $g \in G$, é uma bijecção. A igualdade (2) deriva de α ser constante nas classes de conjugação.
Logo $\phi_{\alpha,V}$ é um G-homomorfismo e portanto, pelo Lema de Schur, $\phi_{\alpha,V} = \lambda \mathrm{Id}$. Se a dimensão de V for n, temos:

$$\begin{aligned}
\lambda &= \frac{1}{n}\mathrm{tr}(\phi_{\alpha,V}) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{g\in G}\alpha(g)\,\chi_V(g) \\
&= \frac{|G|}{n}(\alpha, \chi_{V^\star}) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Temos então que $\phi_{\alpha,V} = 0$ para todas as representações irredutíveis V de G. Logo $\sum\limits_{g\in G}\alpha(g)g|_W = 0$ para toda a representação W de G, já que W é soma directa de representações irredutíveis. Se W for a representação regular de G, $W = \mathbb{C}G$, então $\phi_{\alpha,W} = \sum\limits_{g\in G}\alpha(g)g = 0$ implica $\alpha(g) = 0$ para todo o $g \in G$, pois, fixando $h \in G$ o conjunto $\{g{\cdot}h \mid g \in G\} = G$, logo é linearmente independente, e portanto $\sum\limits_{g\in G}\alpha(g)gh = 0$ só é possível se $\alpha(g) = 0$ para todo o $g \in G$. Relembremos que na representação regular $g \cdot h = gh$.
Isto é absurdo, pois por definição $\alpha \neq 0$. Este absurdo resultou de assumir que o número de classes de isomorfismo de representações irredutíveis é menor que o número de classes de conjugação de G. □

O resultado seguinte é muito importante para determinar as dimensões possíveis das representações irredutíveis de um grupo finito.

Proposição 3.4. *Seja $\{V_1, \dots, V_k\}$ um conjunto de representantes de todas as classes de isomorfismo das representações irredutíveis de G. Então:*

$$\sum_{i=1}^{k}(\dim V_i)^2 = |G|\,.$$

Demonstração. Consideremos a representação regular de G, $\mathbb{C}G$.
Considerando os elementos de G como a base de $\mathbb{C}G$, pode-se facilmente ver que

$$\chi_{\mathbb{C}G}(g) = \begin{cases} 0 \text{ se } g \neq e \\ |G| \text{ se } g = e. \end{cases}$$

Escrevendo $\mathbb{C}G$ como soma directa de representações irredutíveis temos que

$$\mathbb{C}G \cong V_1^{\oplus a_1} \oplus \cdots \oplus V_k^{\oplus a_k},$$

onde $a_i \geq 0$ para todo o $i \in \{1, \ldots, k\}$.
Como vimos anteriormente, $a_i = (\chi_{\mathbb{C}G}, \chi_{V_i}) = \frac{1}{|G|}\overline{\chi_{V_i}(e)}\,|G| = \mathrm{dim}V_i$. Finalmente temos que

$$\begin{aligned} |G| &= \dim \mathbb{C}G = \dim \left(V_1^{\oplus a_1} \oplus \cdots \oplus V_k^{\oplus a_k}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{k} a_i \dim V_i = \sum_{i=1}^{k} a_i^2. \end{aligned}$$

□

Definição 3.3. Uma representação $\rho : G \to GL(V)$ diz-se fiel se o homomorfismo ρ for injectivo.

O seguinte resultado, atribuído a Burnside e Molien, diz essencialmente que se tomarmos uma representação fiel de um grupo finito G, então todas as representações irredutíveis de G ocorrem como subrepresentações das potências tensoriais $V^{\otimes k}$ de V, para $k > 0$. A demonstração que apresentamos é inspirada em [8, Ex. 2.36], embora a argumentação final, recorrendo à matriz de Vandermonde, seja nossa. A prova da identidade envolvendo o determinante de Vandermonde pode ser consultada em [4].

Proposição 3.5. *Se V é uma representação fiel do grupo finito G, então para cada representação irredutível W de G existe $k > 0$ tal que essa representação está contida em $V^{\otimes k}$, i.e., existe k tal que na representação de $V^{\otimes k}$ como soma de representações irredutíveis existem parcelas isomorfas a W.*

Demonstração. Seja ϕ o carácter da representação irredutível W de G e χ o carácter de V. Pelo que vimos anteriormente, o carácter de $V^{\otimes k}$ é dado por χ^k (cada entrada do vector carácter é elevada a k). Seja $a_n = (\chi^n, \phi)$ a multiplicidade da representação irredutível W em $V^{\otimes n}$. Temos então a seguinte série formal de potências:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n t^n = \frac{1}{|G|} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{g \in G} \overline{\phi(g)}\, \chi^n(g) t^n.$$

Obviamente, χ é constante nas classes de conjugação de G, podendo para algumas classes de conjugação diferentes ter iguais valores. Criamos assim uma partição de G, onde dois elementos estão numa mesma parte se tiverem uma igual imagem por χ. Seja então P o conjunto formado pelas partes de G induzidas por χ, i.e., $P = \{\chi^{-1}(z) \mid z \in \operatorname{Im}\chi\}$. Vamos agrupar essas partes de G no somatório, chegando a:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n t^n = \frac{1}{|G|} \sum_{n=1}^{\infty} t^n \sum_{p \in P} f(\phi, p)\, \chi^n(p),$$

onde $f(\phi, p) = \sum_{g \in p} \overline{\phi(g)}$ e $\chi(p)$ designa o valor de χ num qualquer elemento de p.
Seja $P^\star$ o subconjunto de P formado pelos elementos $p \in P$ tais que $\chi(p) \neq 0$ e $f(\phi, p) \neq 0$. Logo temos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n t^n = \frac{1}{|G|} \sum_{n=1}^{\infty} t^n \sum_{p \in P^\star} f(\phi, p)\, \chi^n(p).$$

Este somatório faz sentido mesmo que $P^\star$ seja vazio, pois por convenção uma soma vazia tem valor 0.
Contudo, vamos ver que $P^\star$ é não vazio. Comecemos por pegar em e, o elemento neutro de G. Temos que $\chi(e) = \dim V$. Seja $g \in G \setminus \{e\}$ e λ um valor próprio da acção de $g|_V$. Como $g^{|G|} = e$ temos que $\lambda^{|G|} = 1$, logo λ é raiz da unidade, e como tal tem parte real no máximo 1. Se $\chi(g) = \dim V$ então todos os valores próprios da acção de $g|_V$ têm de ser 1, o que obriga a acção de $g|_V$ a ser a identidade, o que é impossível pois V é uma representação fiel. Logo $\{e\} \in P$. Como $\chi(e) = \dim V \neq 0$ e $f(\phi, \{e\}) = \overline{\phi(e)} = \dim W \neq 0$, temos que $P^\star$ é não vazio, pois $\{e\} \in P^\star$.
Resta agora ver que esta série não é constante igual a 0. Seja $P^\star = \{p_1, \dots p_k\}$, $k \geq 1$. Se $a_1 = \cdots = a_k = 0$ temos que

$$\begin{pmatrix} \chi(p_1) & \chi(p_2) & \dots & \chi(p_k) \\ \chi(p_1)^2 & \chi(p_2)^2 & \dots & \chi(p_k)^2 \\ \vdots & & & \vdots \\ \chi(p_1)^k & \chi(p_2)^k & \dots & \chi(p_k)^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(\phi, p_1) \\ f(\phi, p_2) \\ \vdots \\ f(\phi, p_k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

e isto implica que a matriz dos coeficientes deste sistema tem determinante 0, pois o vector coluna do membro da esquerda não tem entradas iguais a 0. Isto é impossível pois este determinante é $\prod_{i=1}^{k} \chi(p_i) \prod_{0<i<j\leq k} (\chi(p_j) - \chi(p_i))$, pois a matriz é obtida a partir da matriz de Vandermonde transpondo e multiplicando cada coluna por um escalar (não nulo).
Logo o determinante da matriz não é 0, o que implica que pelo menos um dos termos $a_1, \dots, a_k$ não é 0.
Logo, a série de potência não é identicamente nula, o que implica que cada representação irredutível de G esteja presente em $V^{\otimes k}$, para algum $k > 0$. □

Da demonstração podemos até dizer que cada representação irredutível de G está presente em algum $V^{\otimes k}$, com k a ser menor ou igual ao número de valores distintos de χ, e este número é menor ou igual ao número de classes de conjugação de G.

3.2 Exemplos de Tabelas de Caracteres

Dado um grupo finito G, a sua tabela de caracteres é uma tabela que permite a quem a vê identificar rapidamente quantas representações irredutíveis tem o grupo (a menos de isomorfismo), assim como os vectores carácter induzidos por cada representação.
A tabela de caracteres de um grupo G é uma tabela bidimensional cujas colunas correspondem às diferentes classes de conjugação de G e cujas linhas correspondem às suas representações irredutíveis (não isomorfas). A intersecção de uma linha com uma coluna assume como entrada o valor do carácter correspondente à representação num elemento da classe de conjugação correspondente a essa coluna.
O primeiro passo para fazer uma tabela de caracteres passa por identificar as diferentes classes de conjugação de um grupo, assim como o tamanho de cada classe. A informação sobre o tamanho das classes é relevante para possibilitar um rápido cálculo do produto interno das funções de classes definidas pelos caracteres.
Vamos estudar três grupos particulares: $\mathbb{Z}_3$, S_3 e D_4.
Comecemos com o caso $G = \mathbb{Z}_3$. Neste caso G é abeliano, logo tem 3 classes de conjugação. Assim sendo existem 3 representações irredutíveis não isomorfas duas-a-duas, todas de dimensão 1. Sejam V, U, W essas representações. Podemos começar por fazer a seguinte tabela:

	1 0	1 1	1 2
V	1		
U	1		
W	1		

Tabela 3.1: Tabela de caracteres de Z_3 (incompleta)

Na primeira linha temos o tamanho da classe de conjugação de G identificada pelo representante presente na segunda linha. Na primeira coluna temos as representações irredutíveis não isomorfas duas-a-duas. Na intersecção da coluna referente à classe de conjugação identifica por g e da linha referente à representação Y, apontamos o valor $\chi_Y(g)$. No caso particular em que g é o elemento neutro, obtemos na coluna correspondente as dimensões das representações irredutíveis (ver tabela 3.1).
Como todas as representações têm dimensão 1, e neste caso o traço é multiplicativo, é suficiente saber o valor do carácter em 1, uma vez que 1 gera $\mathbb{Z}_3$. Como o traço é multiplicativo (neste caso), temos que este valor é uma raiz cúbica da unidade.
Seja $\omega = e^{\frac{2\pi}{3}}$. Isto dá-nos então a seguinte tabela de caracteres:

	1	1	1
	0	1	2
V	1	1	1
U	1	ω	ω^2
W	1	ω^2	ω

Tabela 3.2: Tabela de caracteres de Z_3 (completa)

Notemos que nem todas as funções de classe correspondem ao carácter de uma representação. Contudo, neste caso sabemos que existem três representações irredutíveis (a menos de isomorfismo), e que estas são a única possibilidade para os seus caracteres. Logo têm de existir representações irredutíveis com cada um destes caracteres.
A primeira representação irredutível é a chamada representação trivial e é uma que existe sempre, qualquer que seja o G, pois existe sempre o endomorfismo de $G \to \mathrm{GL}(V)$ que manda todos os elementos na identidade. Esta representação só é irredutível quando V tem dimensão 1, pois todo o subespaço de V é uma subrepresentação de V.

Seja agora $G = S_3$, o grupo simétrico. Neste caso temos 3 classes de conjugação, identificadas pelos representantes e, (12) e (123), de tamanhos 1, 3 e 2, respectivamente. Logo existem três representações irredutíveis não isomorfas duas-a-duas, onde uma delas é a trivial. Da proposição 3.4, temos que as restantes representações têm dimensão 1 e 2. Temos então a seguinte tabela de caracteres incompleta:

	1	3	2
	e	(12)	(123)
V	1	1	1
U	1		
W	2		

Tabela 3.3: Tabela de carácter de S_3 (incompleta)

Como o espaço U tem dimensão 1, a função traço é multiplicativa neste espaço. Uma vez que $(123)(123) = (132)$, que $(123)(132) = e$ e que (123) e (132) estão na mesma classe de conjugação, temos que $1 = \chi_U((123))^2 = \chi_U((123))$, logo $\chi_U((123)) = 1$. Temos também que $\chi_U((12))^2 = 1$, mas $\chi_U((12))$ não pode ser 1, pois neste caso teríamos que $U \cong V$. Logo $\chi_U((12)) = -1$. Esta representação é a chamada representação sinal, uma vez que $\rho(g) = \mathrm{sgn}(g)\mathrm{Id}_U$.

Seja $(2, a, b)$ o vector carácter de W. Como os vectores são ortogonais, temos que:

$$(\chi_V, \chi_W) = \frac{1}{6}(2 + 3 \times 1 \times a + 2 \times 1 \times b) = 0$$
$$(\chi_U, \chi_W) = \frac{1}{6}(2 + 3 \times (-1) \times a + 2 \times 1 \times b) = 0$$
$$(\chi_W, \chi_W) = \frac{1}{6}(4 + 3 \times a^2 + 2 \times b^2) = 1$$

logo $a = 0$ e $b = -1$. Notemos que aqui usamos o facto de sabermos o tamanho das classes de conjugação para ajudar no cálculo dos produtos internos.
Temos então que a tabela de caracteres de S_3 é:

	1 e	3 (12)	2 (123)
V	1	1	1
U	1	-1	1
W	2	0	-1

Tabela 3.4: Tabela de caracteres de S_3 (completa)

Finalmente, se $G = D_4$, vamos ver G como um subgrupo de S_4. Temos que G tem 8 elementos e tem 5 classes de conjugação, identificadas pelos representantes e, (1234), (12)(34), (13)(24) e (13), de tamanhos 1, 2, 2, 1 e 2, respectivamente. Logo existem quatro representações irredutíveis não isomorfas duas-a-duas de dimensão 1 e uma de dimensão 2. Duas das representações irredutíveis de dimensão 1 são a representação trivial e a induzida pela representação sinal de S_4. Temos então a seguinte tabela de caracteres provisória:

	1 e	2 (1234)	2 (12)(34)	2 (13)	1 (13)(24)
V	1	1	1	1	1
U	1	-1	1	-1	1
W	1				
X	1				
Y	2				

Tabela 3.5: Tabela de caracteres de D_4 (incompleta)

Como o traço é multiplicativo em V, U, W e X é suficiente saber os valores dos caracteres destas representações em (12)(34) e em (13), e cada um destes valores só pode ser 1 ou -1,

logo há 4 maneiras de combinar estes valores. Temos assim encontrados os caracteres das representações irredutíveis de dimensão 1. Para encontrar o vector carácter da representação restante basta calcular num sistema a ortogonalidade dos caracteres.
Após fazer as contas, devemos obter a tabela de caracteres seguinte:

	1 e	2 (1234)	2 (12)(34)	2 (13)	1 (13)(24)
V	1	1	1	1	1
U	1	-1	1	-1	1
W	1	-1	-1	1	1
X	1	1	-1	-1	1
Y	2	0	0	0	-2

Tabela 3.6: Tabela de caracteres de D_4 (completa)

Capítulo 4

O Grupo Simétrico

Neste capítulo tomamos como objectivo perceber quais são as representações irredutíveis do grupo simétrico S_n, e para ajudar nesta missão vamos começar por olhar para as *partições de* n, já que estas parametrizam as classes de conjugação das permutações do conjunto $\{1, \ldots, n\}$. Posteriormente, a título de curiosidade, vamos encontrar uma relação entre as dimensões destas representações irredutíveis e os *hook-lengths* das casas de um *diagrama de Ferrers*. Continuamos a indicar o livro [8] como referência para este assunto, embora se recomende também a consulta de [6] e [11] para uma análise mais profunda do tema e de cariz mais combinatório.

4.1 Representações Irredutíveis de S_n

Vamos começar por definir o que entendemos por uma partição de um número:

Definição 4.1. Seja n um inteiro positivo. Dizemos que $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ é uma partição de n se $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_k$ e $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = n$, onde $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{Z}_{>0}$.

Se λ é uma partição de n usamos a notação $\lambda \vdash n$

Nota. Os conceitos de partição de um número e de partição de um conjunto são diferentes, pois no segundo não só interessa o tamanho de cada parte como quais elementos estão em cada parte. Por exemplo, o número 3 admite três partições diferentes, mas o conjunto $\{1, 2, 3\}$ admite cinco partições distintas.

Uma partição pode ser representada por um diagrama, chamado de diagrama de Ferrers. A título de exemplo, vejamos o diagrama da partição $(4, 3, 1, 1)$ de 9.

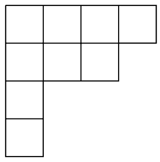

Figura 4.1: Diagrama de Ferrer

Notemos que estes diagramas são justificados acima e à esquerda. A linha i do diagrama tem comprimento λ_i e o diagrama tem tantas linhas quanto o número de entradas de λ. A cada quadrícula de um diagrama também se pode chamar de *casa*. Consideremos uma numeração das linhas e das colunas do diagrama, feita sequencialmente, de modo a que quadrícula situada no canto superior esquerdo seja $(1,1)$.
Definimos agora $\overline{\lambda} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ como o conjunto das casas de λ, i.e., $(i,j) \in \overline{\lambda}$ se e só se $j \leq \lambda_i$. A primeira entrada do par será referente à linha e a segunda será referente à coluna, de modo aos números do par ordenado estarem de acordo com a numeração das linhas e colunas anteriormente considerada.
Chamamos de *hook* de (i,j) ao conjunto de casas (k,l) do diagrama tais que $k = i \wedge l \geq j$ ou $k \geq i \wedge l = j$. Na figura a seguir temos representado no diagrama de Ferrers da partição $(4,3,1,1)$ o hook da casa $(1,2)$:

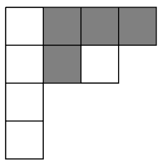

Figura 4.2: Hook da casa $(1,2)$

Denotamos por $h(i,j)$ o *hook-length* da casa (i,j), que é definido como sendo o número de casas existentes no hook de (i,j). No exemplo anterior, temos que $h(1,2) = 4$.
Num diagrama de Ferrers podemos ainda considerar uma numeração, associando um número a cada quadrícula do diagrama. Neste caso chamamos ao diagrama de *Young tableau*.
A numeração canónica de um diagrama consiste em atribuir sequencialmente os inteiros positivos às casas do diagrama, começando na casa $(1,1)$ e seguindo da esquerda para a direita, de cima para baixo. A título de exemplo, vejamos o diagrama anterior numerado com a numeração canónica, ao qual chamamos de *tableau canónico*.

1	2	3	4
5	6	7	
8			
9			

Figura 4.3: Exemplo de tableau canónico

O interesse no estudo das partições de n deve-se ao facto de S_n ter tantas classes conjugação como n tem partições. Isto acontece pois duas permutações pertencem à mesma classe de conjugação se tiverem igual estrutura na escrita como produto de ciclos disjuntos, i.e., ao escrevermos ambas as permutações como produto de ciclos disjuntos, o número de k-ciclos é igual para as duas permutações, para todo o $k \in \{1, \dots, n\}$. Os comprimentos dos diferentes ciclos disjuntos (contando também os 1-ciclo) formam uma partição de n.

Exemplo 4.1. *Em S_9 as permutações $(1234)(567)$ e $(7562)(148)$ fazem parte da mesma classe de conjugação, e estão ambos associados à partição $(4, 3, 1, 1)$ de 9.*

Assim sendo, o nosso próximo objectivo será criar uma bijecção entre classes de isomorfismo das representações irredutíveis de S_n e as partições de n.

Seja T o diagrama de Ferrers associado a λ, numerado com a numeração canónica. Seja $g \in S_n$. Chamemos gT ao diagrama (com o mesmo formato de T) com a numeração obtida após a aplicação de g a T, i.e., a quadrícula de T que está associada número i vai estar associada ao número $g(i)$ em gT. Notemos que com esta definição temos que, para $g, h \in G$, o diagrama $(gh)T$ tem a mesma numeração que o diagrama $g(hT)$.

Seja T o diagrama de Ferrers associado a λ, numerado com a numeração canónica e seja $g \in S_n$. Dizemos que g *preserva linhas* de T se $g(i)$ e i estiverem na mesma linha de T, para todo $i \in \{1, \dots, n\}$. Analogamente também podemos definir o conceito de *preservar colunas*.

Dado um diagrama de uma partição λ de n e T o diagrama de Ferrers correspondente, numerado com a numeração canónica, podemos considerar os seguintes subgrupos de S_n:

$$P_\lambda = \{g \in S_n,\ g \text{ preserva linhas de } T\},$$
$$Q_\lambda = \{g \in S_n,\ g \text{ preserva colunas de } T\}.$$

Exemplo 4.2. *Seja $\lambda = (3, 1)$, uma partição de 4, e consideremos o seu tableau canónico:*

1	2	3
4		

Figura 4.4: Tableau canónico de $(3, 1)$

Neste caso temos que $P_\lambda = \{Id, (12), (13), (23), (123), (132)\}$ e $Q_y = \{Id, (14)\}$

Consideremos agora os seguintes elementos em $\mathbb{C}S_n$, a álgebra de grupo de S_n:

$$a_\lambda = \sum_{g \in P_\lambda} g,$$
$$b_\lambda = \sum_{g \in Q_\lambda} (\mathrm{sgn}(g)g),$$
$$c_\lambda = a_\lambda b_\lambda.$$

A seguinte proposição vai ser importante para se perceber melhor que elemento da álgebra de grupo é este c_λ.

Proposição 4.1. *Seja $g \in S_n$. Se $g = pq = p'q'$ com $p, p' \in P_\lambda$ e $q, q' \in Q_\lambda$, então $p = p'$ e $q = q'$.*

Demonstração. Comecemos por notar que P_λ e Q_λ são subgrupos de S_n cuja intersecção é exclusivamente o elemento neutro. Temos então que:

$$pq = p'q' \Leftrightarrow p'^{-1}p = q'q^{-1}.$$

Seja $h = p'^{-1}p = q'q^{-1}$. Temos então que $h \in P_\lambda$ e $h \in Q_\lambda$, o que implica a que h seja o elemento neutro de S_n. Logo temos que $p = p$' e $q = q'$. □

Se considerarmos $c_\lambda = \sum_{g \in S_n} n_g g$, com $n_g \in \mathbb{C}$, graças a esta proposição, podemos concluir que se existirem $p \in P_\lambda$ e $q \in Q_\lambda$ tais que $g = pq$ então $n_g = \mathrm{sgn}(q)$, e se estes p e q não existirem, então $n_g = 0$.
O teorema seguinte descreve todas classes de isomorfismo das representações irredutíveis de S_n à custa destes elementos c_λ da álgebra de grupo.

Teorema 4.1. *Consideremos o grupo simétrico S_n. Seja λ uma partição de n e c_λ definido como acabamos de ver. Então:*

- *$c_\lambda^2 = n_\lambda c_\lambda$ para algum $n_\lambda \in \mathbb{C}$.*
- *$\mathbb{C}S_n c_\lambda \subseteq \mathbb{C}S_n$ é uma representação irredutível de S_n.*
- *Toda a representação irredutível de S_n é isomorfa a uma representação da forma $\mathbb{C}S_n c_\lambda$, para uma única partição λ de n.*

Para provar este teorema, comecemos por atentar no seguinte lema:

Lema 4.1. *Seja λ uma partição de n, $P = P_\lambda$, $Q = Q_\lambda$, $a = a_\lambda$, $b = b_\lambda$, $c = c_\lambda$. Então:*

1. *$\forall p \in P, pa = ap = a$*

2. *$\forall q \in Q, (sgn(q)q)b = b(sgn(q)q) = b$*

3. *$\forall p \in P, \forall q \in Q : pc(sgn(q)q) = c$ e, a menos da multiplicação de c por um escalar, não há mais nenhum elemento de $\mathbb{C}S_n$ com esta propriedade.*

Demonstração. Só a segunda parte do terceiro ponto é que não é completamente trivial, pois as outras são consequências directas de P e Q serem grupos.
Seja $x = \sum\limits_{g \in S_n} n_g g$ elemento de $\mathbb{C}S_n$ e seja $p \in P$ e $q \in Q$. Se $px(\text{sgn}(q)q) = x$ então temos que $n_{pgq} = \text{sgn}(q) n_g$ para todo o $g \in G$. Se considerarmos o caso particular em que g é o elemento neutro temos que $n_{pq} = \text{sgn}(q) n_e$. Vamos ver que se g não é da forma pq, com $p \in P$ e $q \in Q$, então $n_g = 0$. Após provar isto, temos então que x tem de ser um múltiplo de c, mais concretamente $n_e c$.
Seja $g = pq$, com $p \in P$ e $q \in Q$. Se dois números estão numa mesma linha de T então têm de estar em colunas diferentes de T, e assim sendo têm de estar em colunas diferentes de qT. Assim sendo, os termos que inicialmente estavam numa mesma linha vão agora estar espalhados pelas colunas que essa linha intersecta, de modo a estar um por coluna. Quando aplicamos p a qT estes números, que estavam inicialmente numa mesma linha, vão-se permutar, continuando então em colunas diferentes. Logo dois números que em T estejam numa mesma linha estão em colunas diferentes de gT.
Reciprocamente, vamos ver que se gT não tem numa mesma coluna números que em T estão numa mesma linha, então $g = pq$, para algum $p \in P$ e $q \in Q$.
Seja $p_1 \in P$ uma permutação que põe os números da primeira linha de T na coluna em que estão em gT, fixando as restantes entradas. Este p_1 existe pois, por hipótese, todos os números da primeira linha de T estão em colunas diferentes de gT, e o comprimento da primeira linha é o número de colunas do diagrama de Ferrers de T. Notemos que todos os números da primeira linha de T ocorrem em $p_1^{-1} gT$ na mesma coluna em que ocorrem em T. Recursivamente, podemos encontrar $p_2, p_3, \ldots, p_k \in P$ (onde k é o número de linhas de T), onde p_i vai permutar os números que estão na i-ésima linha de T, colocando-os em colunas concordantes com as que têm em gT, e fixar as restantes entradas. Estes p_i existem pois os termos da linha i não podem aparecer em gT em colunas onde estes não apareciam T, devido aos espaços existentes nessas colunas terem se estar ocupados pelos números das linhas anteriores.
Seja $p = p_k^{-1} p_{k-1}^{-1} \ldots p_2^{-1} p_1^{-1}$. Notemos que agora todas as entradas de pgT ocorrem em pgT e em T na mesma coluna. Como tal existe $q \in Q$ tal $qpgT = T$. Logo $qpg = e$, o que implica $g = p^{-1} q^{-1}$.
Logo, dado $g \in S_n$, temos que existem $p \in P$ e $q \in Q$ tais que $g = pq$ se e só se quaisquer dois números que estão numa mesma linha de T estão em colunas diferentes de gT.
Seja $g \in S_n$ tal que não existem $p \in P$ e $q \in Q$ tais que $g = pq$. Temos que existem dois números, a e b, que estão numa mesma linha em T e que estão numa mesma coluna em gT.

Seja $t = (ab)$ a transposição desses dois números. Se considerarmos $p = t \in P$ e $q = g^{-1}tg$ ($q \in Q$ pois q é a transposição que troca $g^{-1}(a)$ e $g^{-1}(b)$ que, por definição de g, estão numa mesma coluna de T), temos que $g = pgq$.
Logo

$$n_{pgq} = \mathrm{sgn}(q)n_g \Rightarrow n_g = -n_g \Rightarrow n_g = 0.$$

Portanto temos que $px(\mathrm{sgn}(q)q) = x$ para todo $p \in P$ e $q \in Q$ obriga a x ser um múltiplo de c. $\square$

Consideremos no conjunto das partições a ordem lexicográfica usual, que denotamos por $>$. Reparemos agora no seguinte lema:

Lema 4.2. *Sejam λ e μ partições de n.*

1. *Se $\lambda > \mu$ então para todo o $x \in \mathbb{C}S_n$, $a_\lambda x b_\mu = 0$.*

2. *Para todo o $x \in \mathbb{C}S_n$, $c_\lambda x c_\lambda$ é um múltiplo escalar de c_λ.*

Demonstração.

1. Basta considerar o caso $x = g \in S_n$, pois todo o $x \in \mathbb{C}S_n$ é combinação linear de elementos de S_n. Queremos então provar que $a_\lambda g b_\mu = 0$. Sejam T e T' os diagramas com a numeração canónica dados por λ e μ, respectivamente. Como $\lambda > \mu$ existem dois números numa mesma linha de T que estão numa mesma coluna de gT'. Seja t a transposição desses números. Como tal temos que $a_\lambda t = a_\lambda$. Tal como vimos antes temos que $g^{-1}tg \in Q_\mu$ e $\mathrm{sgn}(g^{-1}tg) = -1$. Logo $g^{-1}tgb_\mu = -b_\mu$, o que equivale a $tgb_\mu = -gb_\mu$, pois g é invertível.

   Portanto temos que $a_\lambda g b_\mu = a_\lambda t(-tgb_\mu) = -a_\lambda g b_\mu$, logo $a_\lambda g b_\mu = 0$.

2. $c_\lambda x c_\lambda$ é constante para a multiplicação por $p \in P$ à esquerda e por $\mathrm{sgn}(q)q$, $q \in Q$, à direita, e como tal tem de ser um múltiplo escalar de c_λ, graças ao lema anterior.

$\square$

Com isto temos provado o primeiro ponto do teorema.
Vejamos agora o seguinte lema, que será o último que precisaremos para terminar a prova do Teorema 4.1:

Lema 4.3. *Seja $V_\lambda = \mathbb{C}S_n c_\lambda$. Então:*

1. *Cada V_λ é uma representação irredutível de S_n;*

2. *Se $\lambda \neq \mu$, então V_λ e V_μ não são isomorfas.*

Demonstração. Podemos definir uma acção de $\mathbb{C}S_n$ no próprio, dada pelo produto usual do próprio. Como a operação $\cdot$ de $\mathbb{C}S_n$ é obtida por bilinearização da operação $\cdot$ de S_n, temos que se as representações V e W são isomorfas como S_n-módulos, então também são isomorfas como $\mathbb{C}S_n$-módulos.

1. Comecemos por notar que $V_\lambda \neq 0$, pois $0 \neq c_\lambda \in V_\lambda$. Pelo lema anterior, temos que $c_\lambda V_\lambda \subseteq \mathbb{C}c_\lambda$. Logo se W é um subrepresentação de V_λ, então $c_\lambda W$ é $\mathbb{C}c_\lambda$ ou $\{0\}$. No primeiro caso temos:

$$V_\lambda = \mathbb{C}S_n c_\lambda = \mathbb{C}S_n \mathbb{C}c_\lambda = \mathbb{C}S_n c_\lambda W \subseteq W$$

   onde a última inclusão se deve ao facto de W ser uma representação. Logo $W = V_\lambda$.

   Por outro lado, se $c_\lambda W = \{0\}$ temos que:

$$W \cdot W \subseteq V_\lambda \cdot W = 0$$

   o que implica que $W \cdot W = \{0\}$.

   Como W é um subrepresentação de $\mathbb{C}S_n$, existe K subrepresentação de $\mathbb{C}S_n$ tal que $\mathbb{C}S_n = W \oplus K$. Temos então:

$$W \subseteq W \cdot \{e\} \subseteq W\mathbb{C}S_n = W \cdot W \oplus W \cdot K = W \cdot K \subseteq K.$$

   Logo $W \subseteq K$ e assim $W = \{0\}$.

   Logo V_λ é uma representação irredutível.

   Um argumento análogo pode ser feito para provar que $c_\lambda V_\lambda \neq \{0\}$, pois caso contrário teríamos que $V_\lambda V_\lambda = \{0\}$ o implicaria $V_\lambda = \{0\}$, o que é falso. Logo $c_\lambda V_\lambda = \mathbb{C}c_\lambda$.

2. Sem perda de generalidade, digamos que $\lambda > \mu$. Temos então que $c_\lambda V_\lambda = \mathbb{C}c_\lambda$ e que $c_\lambda V_\mu = 0$, logo estes dois S_n-módulos não são isomorfos porque se $\varphi \in \mathrm{Hom}_{S_n}(V_\lambda, V_\mu)$ temos

$$0 = c_\lambda \circ \varphi = \varphi \circ c_\lambda = \mathbb{C}\varphi(c_\lambda),$$

   e assim ϕ não é injectivo.

□

Demonstração do Teorema 4.1. A primeira afirmação Teorema segue do Lema 4.1 e as restantes do Lema 4.3 Como n tem tantas partições como S_n classes de conjugação, temos que todas as representações irredutíveis de S_n são isomorfas a V_λ, para uma única partição λ de n, o que conclui a prova do Teorema. □

Exemplo 4.3. *Consideremos o caso particular em que $\lambda = (n)$. Seja T o diagrama de Ferrers por ele induzido, e consideremos nele a numeração canónica.*

1	2	$\cdots$	n

Figura 4.5: Tableau canónico para $\lambda = (n)$

Neste caso temos que $P_\lambda = S_n$ e $Q_\lambda = \{e\}$, e consequentemente podemos ver que $a_\lambda = \sum\limits_{g\in S_n} g$ e $b_\lambda = e$, logo $c_\lambda = a_\lambda$.
Para todo $h \in S_n$, temos que $h \cdot c_\lambda = \sum\limits_{g\in S_n} hg = \sum\limits_{g\in S_n} g = c_\lambda$.
Seja $x \in \mathbb{C}S_n$. Então $x = \sum\limits_{g\in S_n} a_g g$, com $a_g \in \mathbb{C}$. Temos então:

$$V_\lambda = x \cdot c_\lambda = \sum_{g\in S_n} a_g c_\lambda$$

Isto implica que $\mathbb{C}S_n c_\lambda = \mathbb{C}c_\lambda$.
Logo a representação irredutível V_λ tem dimensão 1, e como $gc_\lambda = c_\lambda$, para todo o $g \in S_n$, podemos concluir que esta representação é a representação trivial de S_n.

Exemplo 4.4. *Outro exemplo também fácil de trabalhar consiste em considerar o caso em que $\lambda = (1, 1, \ldots, 1) \vdash n$. Neste caso temos que o diagrama de Ferrers associado terá exclusivamente uma coluna, o que implicará $c_\lambda = \sum\limits_{g\in S_n} sgn(g)g$.*
Para todo o $h \in S_n$ temos que $h \cdot c_\lambda = \sum\limits_{g\in S_n} sgn(g)hg = sgn(h) \sum\limits_{g\in S_n} sgn(h)sgn(g)hg = sgn(h)c_\lambda$.
Logo, neste caso, a representação irredutível V_λ também tem dimensão 1, e como $gc_\lambda = sgn(g)c_\lambda$, para todo o $g \in S_n$, podemos concluir que esta representação é a representação sinal de S_n.

4.2 Fórmula de Frobenius e Hook-Lengths

O teorema seguinte dá-nos uma fórmula que nos permite calcular o carácter de cada representação irredutível de S_n. Devido à complexidade da fórmula e do facto de estar a ser apresentada a título de curiosidade, a sua demonstração não será aqui apresentada.

Teorema 4.2 (Fórmula de Frobenius)**.** *Seja λ uma partição de n, definimos χ_λ como sendo o carácter da representação irredutível V_λ de S_n associada a λ, obtida como é descrito pelo teorema anterior. Então, para $g \in S_n$, temos*

$$\chi_\lambda(g) = \left[\Delta(x)\prod_{j=1}^{n} P_j(x)^{i_j}\right]_{(l_1,\dots,l_k)}, \tag{4.1}$$

onde

- *k é o número de partes de λ, i.e., o número de linhas do diagrama de Ferrers induzido por λ;*
- *i_j é o número de j-ciclos de g, considerando g escrito como um produto de ciclos disjuntos;*
- $\Delta(x) = \prod\limits_{0<i<j\leq k}(x_i - x_j) \in \mathbb{C}[x_1,\dots,x_k]$;
- $P_j(x) = \sum\limits_{i=1}^{k} x_i^j \in \mathbb{C}[x_1,\dots,x_k]$;
- $l_i = \lambda_i + k - i$;
- *Seja $f \in \mathbb{C}[x_1,\dots,x_k]$. Temos que $[f(x)]_{(l_1,\dots,l_k)}$ é o coeficiente de $x_1^{l_1}\dots x_k^{l_k}$ em f.*

Fixada uma partição λ de n, vamos utilizar a fórmula de Frobenius para calcular $\chi_\lambda(e) = \dim V_\lambda$, onde V_λ é a representação irredutível associada a λ.
Neste caso, temos que $i_1 = n$ e $i_j = 0$ para $j \neq 1$. Logo, no produtório da fórmula de Frobenius só será relevante o caso $j = 1$. Logo:

$$\prod_{j=1}^{n} P_j(x)^{i_j} = (x_1 + \cdots + x_k)^n = \sum_{r_i\geq 0,\, r_1+\cdots+r_k=n} \frac{n!}{r_1!\cdots r_k!} x_1^{r_1}\cdots x_k^{r_k}. \tag{4.2}$$

Notemos ainda que $\Delta(x)$ é o determinante da matriz de Vandermonde. Logo:

$$\Delta(x) = \begin{vmatrix} 1 & x_k & \dots & x_k^{k-1} \\ \vdots & & & \vdots \\ 1 & x_1 & \dots & x_1^{k-1} \end{vmatrix} = \sum_{\sigma\in S_k} \operatorname{sgn}(\sigma) x_k^{\sigma(1)-1}\cdots x_1^{\sigma(k)-1} \tag{4.3}$$

Multiplicando ambos os somatórios, o coeficiente de $x_1^{l_1}\cdots x_k^{l_k}$ é dado por:

$$\chi_\lambda(e) = \sum_{\substack{\sigma\in S_k \\ \sigma(i)-1\leq l_{k+1-i}}} sgn(\sigma)\frac{n!}{(l_1-(\sigma(k)-1))!\dots(l_k-(\sigma(1)-1))!}$$

pois temos de considerar $r_i = l_i - (\sigma(k+1-i) - 1)$. Notemos que podemos considerar os r_i iguais a estes valores pois $\sum\limits_{i=1}^{k} l_i - (\sigma(k+1-i)-1) = \sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i + k - i - (\sigma(k+1-i)-1)$ e que $\sum\limits_{i=1}^{k}(k-i-(\sigma(k+1-i)-1)) = 0$, logo como λ é uma partição de n, temos que a soma destes r_i é n.
Temos então que

$$\chi_\lambda(e) = \frac{n!}{l_1! \dots l_k!} \sum_{\sigma \in S_k} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{j=1}^{k} \prod_{i=0}^{\sigma(k+1-j)-2} (l_j - i) \tag{4.4}$$

$$= \frac{n!}{l_1! \dots l_k!} \begin{vmatrix} 1 & l_k & l_k(l_k-1) & \dots \\ \vdots & & & \vdots \\ 1 & l_1 & l_1(l_1-1) & \dots \end{vmatrix} \tag{4.5}$$

onde a entrada (i,j) da matriz em (4.5) é 1 se $j=1$ e $\prod\limits_{r=1}^{j-1} l_{k+1-i} - r + 1$ caso contrário.
As entradas 1 justificam-se pois se $\sigma(k+1-j) = 1$ então $\prod\limits_{i=0}^{\sigma(k+1-j)-2} (l_j - i)$ é um produtório vazio, logo toma o valor 1, por convenção e $\frac{l_j!}{l_j!} = 1$.
Notemos que esta matriz obtém-se de uma matriz de Vandermonde através de soma de múltiplos de uma coluna a outra coluna, logo tem o mesmo determinante que a matriz de Vandermonde. Logo

$$\dim V_\lambda = \chi_\lambda(e) = \frac{n!}{l_1! \dots l_k!} \prod_{0<i<j\leq k} (l_i - l_j).$$

Proposição 4.2. *Seja λ uma partição de n. Temos que* $\dim V_\lambda = \frac{n!}{\prod\limits_{(i,j)\in\overline{\lambda}} h(i,j)}$, *onde $h(i,j)$ é o* hook-length *da casa (i,j).*

Demonstração. Notemos que

$$\dim V_\lambda = \frac{n!}{l_1! \dots l_k!} \prod_{0<i<j\leq k} (l_i - l_j) = \frac{n!}{\prod\limits_{(i,j)\in\overline{\lambda}} h(i,j)} \Leftrightarrow$$

$$\frac{l_1! \dots l_k!}{\prod\limits_{0<i<j\leq k} (l_i - l_j)} = \prod_{(i,j)\in\overline{\lambda}} h(i,j).$$

Vamos agir por indução no número de colunas do diagrama de Ferrers associado a λ.
Comecemos por notar que o l_j corresponde exactamente ao hook-length da casa j-ésima casa da primeira coluna.
Se um diagrama só tem uma coluna, temos que $\prod\limits_{(i,j)\in\overline{\lambda}} h(i,j) = l_1 \dots l_k = k!$, pois $l_i = k-i+1$.

Por outro lado, fixando i, temos que

$$\frac{l_i!}{\prod\limits_{i<j\leq k}(l_i-l_j)} = \frac{l_i!}{(l_i-1)(l_i-2)\times\cdots\times 1} = l_i.$$

Logo temos que $\frac{l_1!\ldots l_k!}{\prod\limits_{0<i<j\leq k}(l_i-l_j)} = \prod\limits_{(i,j)\in\overline{\lambda}} h(i,j)$ neste caso.

Se o diagrama λ tem mais que uma coluna, vamos considerar h o subdiagrama que se obtém deste tirando-lhe a primeira coluna. Vamos identificar por $\overline{h}$ o subconjunto das casa do diagrama de λ que são casas de h.

Seja h_i os hook-lengths das casas da segunda coluna, e digamos que o número de casas na segunda coluna é k_h.

Por hipótese de indução, temos que $\frac{h_1!\ldots h_{k_h}!}{\prod\limits_{0<i<j\leq k_h}(h_i-h_j)} = \prod\limits_{(i,j)\in\overline{h}}(h(i,j))$.

$$\frac{h_1!\ldots h_{k_h}!}{\prod\limits_{0<i<j\leq k_h}(h_i-h_j)} = \prod_{(i,j)\in\overline{h}}(h(i,j)) \tag{4.6}$$

$$\Leftrightarrow l_1\ldots l_k\frac{h_1!\ldots h_{k_h}!}{\prod\limits_{0<i<j\leq k_h}(h_i-h_j)} = \prod_{(i,j)\in\overline{\lambda}}(h(i,j)) \tag{4.7}$$

$$\Leftrightarrow l_1\ldots l_k\frac{h_1!\ldots h_{k_h}!}{\prod\limits_{0<i<j\leq k_h}(l_i-l_j)} = \prod_{(i,j)\in\overline{\lambda}}(h(i,j)) \tag{4.8}$$

A última igualdade justifica-se pois se $r\leq k_h$ então $l_r = h_r+1+k-k_h$, e portanto, se $0<i<j\leq k_h$ temos que $l_i-l_j = h_i-h_j$.

Fixemos agora r, com $0<r\leq k_h$. Temos então que:

$$\frac{l_r h_r!}{\prod\limits_{j=r+1}^{k_h}(l_r-l_j)} = \frac{l_r(l_r-(k-k_h+1))!}{\prod\limits_{j=r+1}^{k_h}(l_r-l_j)} \tag{4.9}$$

$$= \frac{l_r!}{(l_r-1)\ldots(l_r-(k-k_h))\prod\limits_{j=r+1}^{k_h}(l_r-l_j)} \tag{4.10}$$

$$= \frac{l_r!}{(l_r-l_k)\ldots(l_r-(l_{k_h+1}))\prod\limits_{j=r+1}^{k_h}(l_r-l_j)} \tag{4.11}$$

$$= \frac{l_r!}{\prod\limits_{j=r+1}^{k}(l_r-l_j)} \tag{4.12}$$

Seja agora $r>k_h$. Notemos que $l_r = \frac{l_r!}{\prod\limits_{j=r+1}^{k}(l_r-l_j)}$, uma vez que $l_i = k-i+1$ se $i>k_h$.

Logo temos que $l_1 \dots l_k \frac{h_1! \dots h_{k_h}!}{\prod\limits_{0<i<j\leq k_h}(l_i - l_j)} = \frac{l_1! \dots l_k!}{\prod\limits_{i<j\leq k}(l_i - l_j)}$, o que conclui a prova.

$\square$

Capítulo 5

Dualidade de Schur-Weyl

Neste capítulo vamos começar por apresentar algumas definições e resultados sobre álgebras, de modo a prepara a demonstração do *Teorema do Duplo Centralizador*. É a este teorema, e a algumas consequências da sua demonstração, que chamamos de Dualidade de Schur-Weyl. Finalmente vamos ver o *Teorema de Schur*, que mostra que podemos usar o Teorema do Duplo Centralizador num caso em que uma das álgebras envolvidas é a álgebra de grupo $\mathbb{C}S_n$. Este resultado tem um grande impacto uma vez que permite obter representações irredutíveis de $\mathrm{GL}(V)$, um grupo infinito, em função das representações irredutíveis dos vários grupos simétricos S_k, $k \geq 1$.

5.1 Definições e Resultados sobre Álgebras

Nesta secção introduziremos as ferramentas essenciais da teoria de anéis e módulos de que faremos uso na secção seguinte. Abordaremos em particular o Teorema de Wedderburn. Com excepção do Lema 5.1, que usa o Lema de Zorn, e dos resultados finais da secção, os restantes conceitos e resultados podem ser revistos em [5] e em [10].

Definição 5.1. Seja $\mathbb{F}$ um corpo. Dizemos que A é uma $\mathbb{F}$-álgebra se A admitir simultaneamente uma estrutura de espaço vectorial sobre o corpo $\mathbb{F}$ e uma estrutura de anel, onde a operação aditiva do espaço vectorial e do anel coincidem e a multiplicação é bilinear. Se não houver ambiguidade sobre o corpo base, diz-se que A é simplesmente uma álgebra.

Já foram visto anteriormente alguns exemplos de álgebras, particularmente as álgebras de grupo. Contudo, nem todas as álgebra têm de ser álgebras de grupo.
Se nada for dito em contrário, vamos considerar as $\mathbb{F}$-álgebras unitárias e de dimensão finita sobre o corpo $\mathbb{F}$. Também vamos considerar $\mathbb{F}$ algebricamente fechado e de característica 0. Um corpo nestas condições é por exemplo $\mathbb{C}$, o corpo dos complexos.

Definição 5.2. Dizemos que uma álgebra (unitária) A é uma álgebra de divisão se todos os seus elementos não nulos forem invertíveis.

Como todas as álgebras são também anéis, dizemos que V é uma representação da álgebra A se for uma representação de A como anel e adicionalmente o homomorfismo $\rho : A \to \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$ for linear.
Seja M um módulo de A. Como A é uma $\mathbb{F}$-álgebra unitária, com unidade 1, M admite uma estrutura de espaço vectorial sobre $\mathbb{F}$, se definirmos a acção de $\mathbb{F}$ em M por $\lambda \cdot m = (\lambda \cdot 1) \cdot m$ para todo $\lambda \in \mathbb{F}$ e $m \in M$. Assim temos que nas álgebras unitárias os conceitos de representação e de módulo são equivalentes.
Uma representação de uma álgebra A diz-se irredutível se as suas únicas subrepresentações forem a própria e o espaço nulo.
Notemos que em geral, se W é uma subrepresentação de V, não existe obrigatoriamente um espaço W' subrepresentação de V tal que $V = W \oplus W'$. Chegamos assim ao conceito de indecomponível.

Definição 5.3. Uma representação diz-se indecomponível se não existirem subrepresentações próprias W e W' tal que $V = W \oplus W'$.

Exemplo 5.1. *Seja* $A = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{C} \right\}$ *a álgebra das matrizes* 2×2 *triangulares superiores com entradas em* $\mathbb{C}$.
Seja $V = \left\{ \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} : u, v \in \mathbb{C} \right\} = M_{2\times 1}(\mathbb{C})$ *uma representação de* A *e consideremos a sua subrepresentação* $W = \left\{ \begin{pmatrix} u \\ 0 \end{pmatrix} : u \in \mathbb{C} \right\}$.
Suponhamos que existe W' *subrepresentação de* V *tal que* $V = W \oplus W'$. *Então existe* $\lambda \in \mathbb{C}$ *e* $w' \in W'$ *tais que:*

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + w'.$$

Logo

$$W' \ni \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} w' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\lambda \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in W,$$

o que é impossível pois W *e* W' *são disjuntos, a menos do vector nulo.*
Podemos então concluir que não existe complemento de W *em* V *que seja uma subrepresentação de* V. *Na realidade este espaço* V *é até indecomponível!*

Finalmente, vamos definir o conceito de representação semisimples:

Definição 5.4. Uma representação (ou módulo) diz-se semisimples se for soma directa de subrepresentações irredutíveis (ou módulos simples).
Uma álgebra diz-se semisimples se e só se todos os seus módulos forem semisimples.

Exemplo 5.2. *Seja G um grupo finito. Vimos na demonstração da Proposição 3.4 que a álgebra de grupo $\mathbb{C}G$, como representação sobre ela própria, é semisimples. Mais tarde veremos que isto de facto implica que a álgebra seja semisimples.*

Para provar que as álgebras de grupo são efectivamente semisiples vamos ver os dois lemas seguintes.

Lema 5.1. *Seja A uma álgebra. Seja W uma representação de A tal que W é gerado linearmente por um conjunto de representações irredutíveis, i.e., $W = \sum_{i \in I} S_i$, onde S_i é simples. Seja N uma subrepresentação de W. Então existe um conjunto $J \subseteq I$ tal que $W = \left(\bigoplus_{j \in J} S_j \right) \oplus N$.*

Demonstração. Seja

$$\zeta = \left\{ K \subseteq I \mid \sum_{k \in K} S_k = \bigoplus_{k \in K} S_k \text{ e } \bigoplus_{k \in K} S_k \cap N = \{0\} \right\}.$$

Notemos que ζ não é vazio pois $\emptyset \in \zeta$. Temos também que ζ é um conjunto parcialmente ordenado para a inclusão usual.
Seja $\{K_\ell\}_{\ell \in \Lambda}$ uma cadeia em ζ. Seja $K = \bigcup_{\ell \in \Lambda} K_\ell$. Vamos ver que $K \in \zeta$.
Dizer que $\sum_{k \in K} S_k = \bigoplus_{k \in K} S_k$ é o mesmo que dizer que $\sum_{i=1}^{n} s_{k_i} = 0$ implica $s_{k_i} = 0$ para todo $1 \leq i \leq n$, onde $s_{k_i} \in S_{k_i}$ e $k_1, \ldots, k_n$ são elementos distintos de K.
Se esta afirmação for falsa, existem s_{k_i} não nulos tais que $\sum_{i=1}^{n} s_{k_i} = 0$. Por estarmos numa cadeia, existe um $\ell \in \Lambda$ tal que $k_1, \ldots, k_n \in K_\ell$. Logo temos que $K_\ell \notin \zeta$, o que é uma contradição. Logo $\sum_{k \in K} S_k = \bigoplus_{k \in K} S_k$.
Se neste argumento trocarmos 0 por um qualquer elemento de N, provamos que $\bigoplus_{k \in K} S_k \cap N = \{0\}$.
Temos então que, pelo Lema de Zorn, ζ tem elementos maximais. Seja J um elemento maximal de J. Vejamos que $W = \bigoplus_{j \in J} S_j \oplus N$. Para tal basta ver que $S_i \subseteq \bigoplus_{j \in J} S_j \oplus N$ para todo o $i \in I$.
Se $S_i \cap \bigoplus_{j \in J} S_j \oplus N = \{0\}$ então podemos considerar a representação $S_i \oplus \bigoplus_{j \in J} S_j \oplus N = \bigoplus_{j \in J \cup \{i\}} S_j \oplus N$. O facto de esta soma ser directa contradiz a maximalidade do conjunto J, logo $S_i \cap \bigoplus_{j \in J} S_j \oplus N \neq \{0\}$, o que implica que $S_i \subseteq \bigoplus_{j \in J} S_j \oplus N$, porque S_i é simples. $\square$

Como consequência deste lema, tomando o caso em que $N = \{0\}$, temos que para uma representação ser semisimples basta que esta seja soma (não necessariamente directa) de representações irredutíveis.
A partir deste lema também temos que nas representações semisimples todas as suas subrepresentações admitem um completemento (como espaço vectorial) que também é uma subrepresentação.

Lema 5.2. *Seja A uma álgebra. Temos que A, como módulo (à esquerda) sobre A, é semisimples se e só se A for uma álgebra semisimples.*

Demonstração. Uma das implicações do lema é consequência da definição de semisimplicidade. Portanto vamos só olhar para a outra implicação.
Relembremos que estamos a assumir que as álgebras têm dimensão finita. Assim sendo, se a representação A é semisimples então $A = V_1 \oplus \cdots \oplus V_l$, com V_i simples para todo o i.
Seja W um A-módulo. Temos que $W = \sum_{i \in I} Aw_i$, onde $\{w_i\}_{i \in I}$ é uma base de W, pois A tem elemento unidade 1. Como Aw_i é um A-módulo, vamos então mostrar que Aw_i é semisimples.
Sejam $v_i \in V_i \subseteq A$ tais que $1 = v_1 + \cdots + v_l$. Então $aw_i = a(1w_i) = a(v_1 w_i + \cdots + v_l w_i)$. Logo $Aw_i = Av_1 w_i + \cdots + Av_l w_i$.
É suficiente então mostrar que $Av_j w_i$ é nulo ou isomorfo a V_j.
$Av_j \subseteq V_j$, logo, como V_j é simples, temos que $Av_j = 0$ ou $Av_j = V_j$. Se $Av_j = 0$ então $Av_j w_i = 0$. Se $Av_j = V_j$ então Av_j é simples.
Consideremos a aplicação:

$$\varphi : Av_j \to Av_j w_i.$$
$$x \mapsto xw_i$$

Notemos φ é um homomorfismo de A-módulos e que φ é sobrejectivo. Como Av_j é simples, temos que $\mathrm{Ker}\varphi = 0$ ou $\mathrm{Ker}\varphi = Av_j$. Se $\mathrm{Ker}\varphi = Av_j$ então $\varphi = 0$ e $Av_j w_i = 0$. Se $\mathrm{Ker}\varphi = 0$ então φ é um isomorfismo e $Av_j w_i \cong V_j$, logo $Av_j w_i$ é simples.
Logo temos que $W = \sum_{\substack{i \in I \\ 1 \leq j \leq \ell}} Av_j w_i$, e como $Av_j w_i$ é o espaço nulo ou é simples, temos, pelo lema anterior, que W é semisimples. □

Como as álgebras de grupos como representação sobre elas próprias são semisimples, temos que estas álgebras são semisimples. Este resultado é conhecido por *Teorema de Maschke*. Como tal, temos que uma subrepresentação de uma representação de uma álgebra de grupo é indecomponível se e só se for irredutível.
Da demonstração do lema tiramos o seguinte corolário:

Corolário 5.1. *Seja A uma álgebra semisimples. Todos os módulos simples de A são isomorfos a algum submódulos do módulo A.*

Notemos que o Lema de Schur anteriormente visto continua a ser válido para representações de álgebras.
O próximo resultado, conhecido por *Teorema de Wedderburn*, é um resultado clássico sobre álgebras, e como tal não será aqui demonstrado. Este teorema será necessário na prova do resultado principal deste capítulo.

Teorema 5.1 (Teorema de Wedderburn). *Seja $A \neq 0$ uma $\mathbb{F}$-álgebra (unitária de dimensão finita). As seguintes condições são equivalentes.*

1. *A é semiprima, i.e., para todo o $a \in A$ temos que $aAa = 0$ implica $a = 0$;*

2. *$A \cong M_{n_1}(D_1) \oplus \cdots \oplus M_{n_k}(D_k)$ para $k \geq 1$, $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ e D_i álgebras de divisão de dimensão finita sobre $\mathbb{F}$;*

3. *Todo o A-módulo é semisimples;*

4. *A, como representação sobre A, é semisimples;*

5. *Todo o ideal esquerdo de A é da forma Ae para algum idempotente $e \in A$.*

Relembremos que estaremos praticamente sempre a trabalhar com $\mathbb{F}$ a ser um corpo algebricamente fechado e de característica 0. Atentemos então no seguinte lema.

Lema 5.3. *Suponhamos que $A \cong M_{n_1}(D_1) \oplus \cdots \oplus M_{n_k}(D_k)$ é uma $\mathbb{F}$-álgebra com $k, n_1, \ldots, n_k \geq 1$ e $D_1, \ldots, D_k$ álgebras de divisão de dimensão finita sobre $\mathbb{F}$. Então A tem exactamente k classes de isomorfismo de representações irredutíveis distintas, representadas por, digamos $V_1, \ldots, V_k$, com $\dim_{\mathbb{F}} V_i = n_i \dim_{\mathbb{F}}(D_i)$ para todo o i, e $A \cong \bigoplus_{i=1}^{k} V_i^{\oplus n_i}$.*

Demonstração. Seja $A_i = M_{n_i}(D_i)$. Por simplicidade, identificamos A_i com a subálgebra $\{0\} \oplus \cdots \oplus \{0\} \oplus M_{n_i}(D_i) \oplus \{0\} \oplus \cdots \oplus \{0\}$ de A.
Seja $E^i_{j\,k} \in A_i$ a unidade matricial de A_i correspondente à entrada (j, k).
Definimos $V_i = A_i E^i_{1\,1} = D_i E^i_{1\,1} \oplus \cdots \oplus D_i E^i_{n_i\,1}$. Então V_i é um A-módulo com $A_j V_i = \{0\}$ para todo o $i \neq j$.
Vejamos que V_i é um A-módulo simples. Seja $\{0\} \neq W \subseteq V_i$ um A-módulo. Tome-se $0 \neq w = \sum_{j=1}^{n_i} \lambda_j E^i_{j\,1} \in W$, com $\lambda_j \in D_i$. Seja k tal que $\lambda_k \neq 0$. Então, para todo o j, temos que $\lambda_k^{-1} E^i_{j\,k} w = E^i_{j\,1}$ e assim $W = V_i$, estabelecendo a simplicidade de V_i.
Seja $\phi : V_i \to V_\ell$ um A-homomorfismo, com $i \neq \ell$. Então se $e_i = \sum_{j=1}^{n_i} E^i_{j\,j}$ é a identidade de A_i temos que $\phi(V_i) = \phi(e_i V_i) = e_i \phi(V_i) \subseteq e_i V_\ell = 0$. Logo $\phi = 0$ e em particular $V_i \ncong V_\ell$.

Mais geralmente, dado $1 \leq j \leq n_i$ temos que

$$A_i E^i_{j\,j} = D_i E^i_{1\,j} \oplus \cdots \oplus D_i E^i_{n_i\,j}$$

é um A-módulo simples isomorfo a V_i e, como A-módulos, temos

$$A_i = \bigoplus_{j=1}^{n_i} A_i E^i_{j\,j} \cong V_i^{\oplus n_i}.$$

Resulta assim que

$$A \cong \bigoplus_{i=1}^{k} V_i^{\oplus n_i}$$

como A módulos, com $V_1, \ldots, V_k$ irredutíveis e dois-a-dois não isomorfos. Pela demonstração do Lema 5.2 (ver também Corolário 5.1), qualquer representação irredutível de A é isomorfa a V_i, para um único $1 \leq i \leq k$.
Finalmente, $\dim_{\mathbb{F}} V_i = \dim_{\mathbb{F}} D_i E^i_{1\,1} \oplus \cdots \oplus D_i E^i_{n_i\,1} = n_i \dim_{\mathbb{F}} D_i$. □

Lema 5.4. *Se D é uma álgebra de divisão de dimensão finita sobre um corpo $\mathbb{F}$ algebricamente fechado, então $D = \mathbb{F}$.*

Demonstração. Seja $n = \dim_{\mathbb{F}} D$. Então, dado $\alpha \in D$, temos que $\{\alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^{n+1}\}$ é linearmente dependente, logo existe um polinómio não nulo $p(x) \in \mathbb{F}[x]$ tal que $p(\alpha) = 0$. Como $\mathbb{F}$ é algebricamente fechado todas as raízes de p estão em $\mathbb{F}$, logo $\alpha \in \mathbb{F}$ e assim $D = \mathbb{F}$. □

O lema seguinte é um resultado que será utilizado várias vezes ao longo desta secção.

Lema 5.5. *Seja A uma $\mathbb{F}$-álgebra.*

1. *Sejam $V_1, \ldots, V_n$ A-módulos tais que $Hom_A(V_i, V_j) = 0$ para $i \neq j$. Então $End_A\left(\bigoplus_{i=1}^{n} V_i\right) \cong \bigoplus_{i=1}^{n} End_A(V_i)$ como álgebras.*

2. *Sejam S, T representações irredutíveis e não isomorfas da álgebra A. Então $Hom_A(S^{\oplus n}, T^{\oplus m}) = 0$ para todo o $m, n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$.*

Demonstração. Seja $\pi_j : \bigoplus_{i=1}^{n} V_i \mapsto V_j$ a projecção (relativamente à decomposição). Então π_j é um homomorfismo. π_j também é um A-homomorfismo pois para todo o $a \in A$, $v_i \in V_i$, temos que $\pi_j(a(v_1 + \cdots + v_n)) = \pi_j(av_1 + \cdots + av_n) = av_j$, onde a última igualdade vem do facto de cada V_i ser uma representação, e portanto $av_i \in V_i$. Por sua vez, $a\pi_j(v_1 + \cdots + v_n) = av_j$. Notemos que se pegarmos num elemento $v \in \bigoplus_{i=1}^{n} V_i$ existem $v_1, \ldots, v_n$ únicos tais que $v_i \in V_i$ e $v = v_1 + \cdots + v_n$.

Seja $f \in \mathrm{End}_A\left(\bigoplus_{i=1}^{n} V_i\right)$ e $v_j \in V_j$. Como V_j é uma representação então temos que $\pi_i f|_{V_j}$ é um A-homomorfismo de V_j para V_i. Se $i \neq j$ então, pelo lema de Schur, este A-homomorfismo tem que ser a função constante nula. Logo para todo o $v_j \in V_j$ temos que $f(v_j) \in V_j$. Logo $f|_{V_j} \in \mathrm{End}_A(V_j)$.
Definimos também para cada $j \in \{1, \dots, n\}$ as injecções canónicas $\iota_j : V_j \to \bigoplus_{i=1}^{n} V_i$. Estas injecções são também A-homomorfismos.
Consideremos então as seguintes funções:

$$\begin{aligned} \phi : \mathrm{End}_A(\bigoplus_{i=1}^{n} V_i) &\to \bigoplus_{i=1}^{n} \mathrm{End}_A(V_i). \\ f &\mapsto (f|_{V_1}, \dots, f|_{V_n}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi : \bigoplus_{i=1}^{n} \mathrm{End}_A(V_i) &\to \mathrm{End}_A(\bigoplus_{i=1}^{n} V_i). \\ (f_1, \dots, f_n) &\mapsto \iota_1 \circ f_1 \circ \pi_1 + \dots + \iota_n \circ f_n \circ \pi_n \end{aligned}$$

Vamos ver que são inversas uma da outra. Sejam $f \in \mathrm{End}_A(\bigoplus V_i)$ e $f_i \in \mathrm{End}_A(V_i)$ genéricos. Seja ainda $v \in \bigoplus V_i$ genérico e $v_1, \dots, v_n$ os únicos elementos tais que $v_i \in V_i$ e $v = v_1 + \dots + v_n$. Então

$$\begin{aligned} &\psi(\phi(f))(v) = \psi((f|_{V_1}, \dots, f|_{V_n}))(v) = \iota_1(f|_{V_1}(\pi_1(v))) + \dots + \iota_n(f|_{V_n}(\pi_n(v))) \\ &= \iota_1(f|_{V_1}(v_1)) + \dots + \iota_n(f|_{V_n}(v_n)) = f(v_1) + \dots + f(v_n) = f(v), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\phi(\psi(f_1, \dots, f_n))(v_1, \dots, v_n) = \phi(\iota_1 \circ f_1 \circ \pi_1 + \dots + \iota_n \circ f_n \circ \pi_n)(v_1, \dots, v_n) \\ &= ((\iota_1 \circ f_1 \circ \pi_1 + \dots + \iota_n \circ f_n \circ \pi_n)|_{V_1}, \dots, (\iota_1 \circ f_1 \circ \pi_1 + \dots + \iota_n \circ f_n \circ \pi_n)|_{V_n})(v_1, \dots, v_n) \\ &= ((\iota_1 \circ f_1 \circ \pi_1)|_{V_1}, \dots, (\iota_n \circ f_n \circ \pi_n)|_{V_n})(v_1, \dots, v_n) \\ &= (f_1, \dots, f_n)(v_1, \dots, v_n) \end{aligned}$$

Logo temos que ϕ e ψ são inversas uma da outra. Finalmente resta ver que ϕ e ψ são homomorfismos. Relembremos para $f \in \mathrm{End}_A(\bigoplus_{i=1}^{n} V_i)$ temos que $f|_{V_j} \in \mathrm{End}_A(V_j)$. Então

$$\begin{aligned} \phi(f \circ g) &= ((f \circ g)|_{V_1}, \dots, (f \circ g)|_{V_n}) \\ &= (f|_{V_1} \circ g|_{V_1}, \dots, f|_{V_n} \circ g|_{V_n}) \\ &= (f|_{V_1}, \dots, f|_{V_n}) \circ (g|_{V_1}, \dots, g|_{V_n}) = \phi(f) \circ \phi(g), \end{aligned}$$

logo ϕ é um isomorfismo.

Para ver que ψ é um homomorfismo comecemos por notar que $\pi_i \circ \iota_j = 0$ se $i \neq j$ e que $\pi_i \circ \iota_i = \mathrm{Id}|_{V_i}$. Então

$$\begin{aligned}
\psi(f_1, \ldots, f_n) \circ \psi(g_1, \ldots, g_n) &= (\iota_1 \circ f_1 \circ \pi_1 + \cdots + \iota_n \circ f_n \circ \pi_n) \circ \\
&\qquad (\iota_1 \circ g_1 \circ \pi_1 + \cdots + \iota_n \circ g_n \circ \pi_n) \\
&= \iota_1 \circ f_1 \circ \pi_1 \circ \iota_1 \circ g_1 \circ \pi_1 + \cdots + \iota_n \circ f_n \circ \pi_n \circ \iota_n \circ g_n \circ \pi_n \\
&= \iota_1 \circ f_1 \circ g_1 \circ \pi_1 + \cdots + \iota_n \circ f_n \circ g_n \circ \pi_n \\
&= \psi((f_1, \ldots, f_n) \circ (g_1, \ldots, g_n)),
\end{aligned}$$

e portanto ψ é um homomorfismo.
Vamos agora olhar para o ponto 2.
Seja $f \in \mathrm{Hom}_A(S^{\oplus n}, T^{\oplus m}) = 0$ uma função não nula e $s = (s_1, \ldots, s_n) \in S^{\oplus n}$ tal que $f(s) \neq 0$. Logo, entre os elementos $(s_1, 0, 0, \ldots, 0), (0, s_2, 0, \ldots, 0), \ldots, (0, \ldots, 0, 0, s_n)$ pelo menos um tem de ter imagem não-nula por f, pois caso contrário, como f é um homomorfismo, teríamos que $f(s) = 0$, o que seria uma contradição. Seja $\overline{s_i} = (0, \ldots, 0, s_i, 0, \ldots, 0)$ um elemento tal que $f(\overline{s_i}) \neq 0$.
Seja $\overline{S_i} = \{0\} \oplus \cdots \oplus \{0\} \oplus S \oplus \{0\} \oplus \cdots \oplus \{0\} \subseteq S^{\oplus n}$, onde a parcela S está na i-ésima posição. Temos então que $f|_{\overline{S_i}}$ é um A-homomorfismo não-nulo. Notemos que $\overline{S_i} \cong S$.
Seja π_j a projecção de $T^{\oplus m}$ na j-ésima parcela. Notemos que para todo o $j \in \{1, \ldots, m\}$ temos que π_j é um A-homomorfismo. Seja k tal que $\pi_k(\mathrm{Im}(f|_{\overline{S_i}})) \neq \{0\}$. Este k existe pois $\mathrm{Im}(f|_{\overline{S_i}})$ não é nulo.
Logo $\pi_k \circ f|_{\overline{S_i}} \in \mathrm{Hom}_A(\overline{S_i}, T)$. Logo $\mathrm{Hom}_A(S, T)$ é não nulo, o que é impossível pelo Lema de Schur. Logo $\mathrm{Hom}_A(S^{\oplus n}, T^{\oplus m}) = 0$.

□

Este é o último lema antes de nos dedicarmos ao Teorema do Duplo Centralizador.

Lema 5.6. *Seja A um $\mathbb{F}$-álgebra e E uma representação semisimples de A de dimensão finita. Então temos o seguinte isomorfismo de A módulos*

$$E \cong \bigoplus_S S \otimes Hom_A(S, E),$$

onde a soma directa é feita sobre todas as representações irredutíveis de A de dimensão finita, a menos de isomorfismos, e a acção de A em $S \otimes Hom_A(S, E)$ é definida por $a \cdot (s \otimes f) = (as) \otimes f$.

Demonstração. Por hipótese, $E \cong \bigoplus_S S^{\oplus a(S)}$ com $a(S) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.
Vejamos que $a(S) = dim_{\mathbb{F}} \mathrm{Hom}_A(S, E)$. Isso é consequência directa dos seguintes isomorfismos (como espaços vectoriais):

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_A(S,E) &\cong \mathrm{Hom}_A\left(S, \bigoplus_T T^{\oplus a(T)}\right)\\ &\overset{\text{L. S.}}{\cong} \mathrm{Hom}_A(S, S^{\oplus a(S)})\\ &\overset{(1)}{\cong} \mathrm{End}_A(S)^{\oplus a(S)}\\ &\overset{\text{L. S.}}{\cong} \mathbb{F}^{a(S)},\end{aligned}$$

onde L.S. refere-se ao Lema de Schur. O isomorfismo (1) é dado por $f \in \mathrm{Hom}_A(S, S^{\oplus a(S)}) \mapsto (\pi_1 \circ \mathrm{Id}, \ldots, \pi_{a(S)} \circ \mathrm{Id}) \in \mathrm{End}_A(S)^{\oplus a(S)}$, onde π_i é a projecção de $S^{\oplus a(S)}$ na sua i-ésima coordenada, de forma análoga ao que foi feito no lema anterior.
Resta então provar que $S^{\oplus a(S)} \cong S \otimes \mathrm{Hom}_A(S,E)$ como A-módulos. Seja $\{e_1, \ldots, e_{a(S)}\}$ uma base de $\mathrm{Hom}_A(S,E)$. Seja $s \in S$ genérico, seja $\phi : S \otimes \mathrm{Hom}_A(S,E) \to S^{\oplus a(S)}$ o homomorfismo definido por $\phi(s \otimes e_i) = (0, \ldots 0, s, 0, \ldots 0)$, onde o s está na i-ésima posição do vector.
Facilmente se verifica que ϕ está bem definido e é sobrejectivo. Como

$$\begin{aligned}\dim_{\mathbb{F}} S^{\oplus a(S)} =& a(S) \dim_{\mathbb{F}} S\\ =& \dim_{\mathbb{F}} S \otimes \mathrm{Hom}_A(S,E),\end{aligned}$$

resulta que ϕ é um isomorfismo de espaços vectoriais.
Finalmente, para todo o $a \in A$ temos que

$$\phi(a(s \otimes e_i)) = \phi(as \otimes e_i) = (0, \ldots, 0, as, 0, \ldots, 0) = a\phi(s \otimes e_i),$$

logo ϕ é um isomorfismo de A-módulos. □

5.2 Teorema do Duplo Centralizador

Podemos agora enunciar e provar um dos resultados fundamentais deste capítulo, o Teorema do Duplo Centralizador, cuja demonstração fará uso das ferramentas da teoria de anéis e módulos que introduzimos na secção anterior. Uma referência para este resultado é o artigo [13], embora sigamos a formulação mais geral de [7, Theorem 5.18.1]. Para facilitar o enunciado deste teorema começamos esta secção com a noção de produto tensorial de duas álgebras.
Sejam A e B $\mathbb{F}$-álgebras. Então o produto tensorial $A \otimes B$ é ainda um $\mathbb{F}$-álgebra com multiplicação determinada pela regra

$$(a \otimes b)(a' \otimes b') = aa' \otimes bb'$$

para todo o $a, a' \in A$ e $b, b' \in B$.
Se V é uma representação de A dada pelo homomorfismo $\rho : A \to \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$ e W é uma representação de A dada por $\tau : B \to \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$, então o produto tensorial $V \otimes W$ tem uma estrutura de representação de $A \otimes B$ associada ao homomorfismo

$$\rho \otimes \tau : A \otimes B \to \mathrm{End}(V \otimes W).$$
$$a \otimes b \mapsto \rho(a) \otimes \tau(b)$$

A acção é assim determinada por $(a \otimes b) \cdot (v \otimes w) = a \cdot v \otimes b \cdot w$ para $a \in A$, $b \in B$, $v \in V$ e $w \in W$.
Estamos assim em condições de enunciar e provar o *Teorema do Duplo Centralizador*, que é a base da *dualidade de Schur-Weyl* e das suas generalizações, que serão objecto deste capítulo e do próximo.

Teorema 5.2 (Teorema do Duplo Centralizador)**.** *Seja E um espaço vectorial de dimensão finita sobre um corpo $\mathbb{F}$ algebricamente fechado. Notemos que $End_{\mathbb{F}}(E)$ é uma $\mathbb{F}$-álgebra. Seja $A \subseteq End_{\mathbb{F}}(E)$ uma subálgebra unitária semisimples. Seja $B = End_A(E)$. Então:*

1. *$End_B(E) = A$;*

2. *B é semisimples;*

3. *Como representação de $A \otimes B$, E decompõe-se como $E = \bigoplus_{i \in I} V_i \otimes W_i$, onde $\{V_i\}$ é um conjunto de representantes das classes de isomorfismos dos A-módulos simples e onde $\{W_i\}$ é um conjunto de representantes das classes de isomorfismos dos B-módulos simples.*

Em particular existe uma bijecção entre as classes de isomorfismo de A-módulos simples e as classes de isomorfismo de B-módulos simples.

Demonstração. Como $A \subseteq \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(E)$ temos que E é uma representação de A para a acção

$$f \cdot e = f(e)$$

para todo o $f \in A$ e $e \in E$. Analogamente temos também que E é uma representação de B.
Como A é semisimples e tem dimensão finita, temos que $A \cong \bigoplus_{i=1}^{\ell} V_i^{n_i}$ onde $\{V_1, \ldots, V_\ell\}$ é um conjunto completo de representantes de todas as classes de isomorfismo de representações irredutíveis de A. Pelo Corolário 5.1, podemos assumir que V_i é um submódulo de A, para todo o i.
Como A é semisimples de dimensão finita e $\mathbb{F}$ é algebricamente fechado, resulta do Teorema de Wedderburn, do Lema 5.3 e do Lema 5.4 que $n_i = \dim V_i$. Em particular, $\dim A = \sum_{i=1}^{\ell} (\dim V_i)^2$.

Passo 1: Ver que $E \cong \bigoplus_{i=1}^{\ell} V_i \otimes \mathrm{Hom}_A(V_i, E)$ com $a_i = \dim_{\mathbb{F}} \mathrm{Hom}_A(V_i, E) \geq 1$ e $\{V_1, \ldots, V_\ell\}$ é um conjunto completo de representantes das classes de isomorfismo de A-módulos simples.

Como E é uma A-módulo e A é semisimples, temos que $E = U_1 \oplus \cdots \oplus U_k$ onde U_i é uma subrepresentação irredutível de E.
Vamos agora ver que todas as representações irredutíveis de A são isomorfas a alguma subrepresentação de E.
Como $A \subseteq End_{\mathbb{F}}(E)$, para cada $e \in E$ consideremos a seguinte aplicação:

$$\begin{aligned} \theta_e : V_i &\to E \\ v &\mapsto v(e). \end{aligned}$$

Como $V_i \subseteq A \subseteq \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(E)$, a acção de A em V_i é a composição. Logo podemos deduzir que θ_e é um A-homomorfismo.
Se $v \in V_i \setminus \{0\}$ então existe $e \in E$ tal que $v(e) \neq 0$, pois $v \in End_{\mathbb{F}}(E) \setminus \{0\}$. Logo $\theta_e \neq 0$.
Então existe uma projecção $\pi_j : E \to U_j$ tal que $\pi_j(v(e)) \neq 0$. Logo $\pi_j \circ \theta_e : V_i \to U_j$ é um A-homomorfismo não nulo, logo, pelo lema de Schur, $V_i \cong U_j$.
Temos então que $E \cong \bigoplus_{i=1}^{\ell} V_i^{a_i}$, com $a_i \geq 1$.
Como vimos no Lema 5.6, podemos concluir que $a_i = \dim_{\mathbb{F}} \mathrm{Hom}_A(V_i, E)$. Por este resultado, temos que $E \cong \bigoplus_{i=1}^{\ell} V_i \otimes \mathrm{Hom}_A(V_i, E)$, onde A actua somente sobre o lado esquerdo do produto tensorial. Definimos $W_i = \mathrm{Hom}_A(V_i, E)$.

Passo 2: $W_i = \mathrm{Hom}_A(V_i, E)$ é uma representação irredutível de B e $W_i \cong W_j \Leftrightarrow i = j$.

Dado $b \in B = \mathrm{End}_A(E)$ e $\phi \in W_i$ temos que $b \circ \phi \in \mathrm{Hom}_A(V_i, E) = W_i$, logo W_i é um B-módulo e $W_i \neq \{0\}$
Seja $\phi \in W_i \setminus \{0\}$; queremos ver que $W_i = B\phi$. Como $\phi \neq 0$ então existe $v \in V_i$ tal que $\phi(v) \neq 0$. Então $\phi(V_i) \neq 0$ e por simplicidade de V_i temos que $\phi(V_i) \cong V_i$, i.e., ϕ é um A-isomorfismo sobre a imagem e esta é isomorfa a V_i. Em particular, como $\phi(V_i)$ é simples, é gerado, como A-módulo, por $\phi(v)$.
Como E é semisimples como A-módulo, pelo Lema 5.1 existe um A-módulo $K \subseteq E$ tal que $E = K \oplus \phi(V_i)$. Seja $\psi \in W_i$ genérico e π a projecção de E em $\phi(V_i)$ relativamente à decomposição $E = K \oplus \phi(V_i)$. Seja $b := \psi \circ \phi^{-1} \circ \pi \in B$. Notemos que $b\phi(v) = \psi(v)$ para todo o v em V_i, logo $b\phi = \psi$. Logo W_i é irredutível.
Vamos agora ver que $W_i \cong W_j \Leftrightarrow i = j$. Seja $\iota \in W_i \setminus \{0\}$ a injecção de V_i em E e seja $\pi \in \mathrm{Hom}_A(E, V_i)$ a projecção correspondente tal $\pi \circ \iota = \mathrm{Id}_{V_i}$. Tome-se $i \neq j$. Seja $\gamma = \iota \circ \pi \in B$. Suponhamos que existe $\theta : W_i \to W_j$ um isomorfismo de B-módulos.
Então $\theta(\gamma\iota) = \gamma(\theta\iota) = (\iota \circ \pi)(\theta\iota)$ e como $\theta\iota \in W_j$ então $\pi(\theta\iota) = 0$ pelo Lema de Schur, pois $i \neq j$. Por outro lado, $\gamma\iota = \iota \neq 0$, logo $\theta(\iota) \neq 0$, por θ ser um isomorfismo, o que é uma contradição. Logo W_i e W_j não são isomorfos se $i \neq j$.

Passo 3: B é semisimples e $\{W_1, \ldots, W_\ell\}$ é um conjunto completo de representantes das classes de isomorfismo de B-módulos.

Temos:

$$\begin{aligned}
B &= \mathrm{End}_A(E) \\
&\cong \mathrm{End}_A\left(\bigoplus_{i=1}^{\ell} V_i^{\oplus a_i}\right) \\
&\overset{(1)}{\cong} \bigoplus_{i=1}^{\ell} \mathrm{End}_A(V_i^{\oplus a_i}) \\
&\overset{(2)}{\cong} \bigoplus_{i=1}^{\ell} M_{a_i}(\mathrm{End}_A(V_i)) \\
&\cong \bigoplus_{i=1}^{\ell} M_{a_i}(\mathbb{F})
\end{aligned}$$

onde a última a igualdade é consequência do Lema de Schur, pois $\mathbb{F}$ é algebricamente fechada. O isomorfismo (1) decorre do Lema 5.5 pois $\mathrm{Hom}_A(V_i^{\oplus a_i}, V_j^{\oplus a_j}) = 0$ se $i \neq j$.
Resta então justificar o isomorfismo 2. Fixemos então i. Pretendemos provar que $\mathrm{End}_A(V_i^{\oplus a_i}) \cong M_{a_i}(\mathrm{End}_A(V_i))$ como álgebras. Seja π_k a projecção de $V_i^{\oplus a_i}$ na k-ésima coordenada e ι_j a injecção de V_i em $V_i^{\oplus a_i}$ na j-ésima coordenada. Atribuímos a $f \in \mathrm{End}_A(V_i^{\oplus a_i})$ a matriz que admite na entrada (k,j) o termo $\pi_k \circ f \circ \iota_j \in \mathrm{End}_A(V_i)$. Reciprocamente, cada $(m_{k\,j})_{k,j} \in M_{a_i}(\mathrm{End}_A(V_i))$ permite definir de forma única $f \in \mathrm{End}_A(V_i^{\oplus a_i})$ tal que $\pi_k \circ f \circ \iota_j = m_{k\,j}$, para todo $1 \leq k,j \leq a_i$. Estas correspondências são homomorfismos de álgebras inversos uma da outra.
Logo, pelo Teorema de Wedderburn, B é semisimples. Resulta do Lema 5.3 que há exactamente ℓ classes de isomorfismo de B-módulos simples. Logo, pelo que foi visto, temos que $\{W_1, \ldots, W_\ell\}$ é um conjunto completo de representantes das classes de isomorfismo de B-módulos simples.

Passo 4: $A = \mathrm{End}_B(E)$

Finalmente, vamos ver que $A = \mathrm{End}_B(E)$. Pela definição de B podemos concluir que $A \subseteq \mathrm{End}_B(E)$.
Para provar que são efectivamente iguais basta ver que têm a mesma dimensão. Ora,

$$\begin{aligned}
\mathrm{End}_B(E) &\overset{(1)}{\cong} \mathrm{End}_B(\bigoplus V_i \otimes W_i) \\
&\overset{(2)}{\cong} \mathrm{End}_B(\bigoplus W_i^{\dim V_i}) \\
&\cong \bigoplus \mathrm{End}_B(W_i^{\dim V_i}) \\
&\cong \bigoplus M_{\dim(V_i)}(\mathrm{End}_B(W_i)) \\
&\cong \bigoplus M_{\dim(V_i)}(\mathbb{F})
\end{aligned}$$

Logo a dimensão de $\mathrm{End}_B(E)$ é $\sum(\dim V_i)^2$., que pelo que vimos no início desta demonstração coincide com a dimensão de A.
Como A-módulo temos que $E = \bigoplus_{i=1}^{\ell} V_i^{\oplus a_i}$ e $V_i^{\oplus a_i} \cong V_i \otimes \mathrm{Hom}_A(V_i, E)$ onde a acção de A é dada por $a \cdot (v_i \otimes \phi_i) = av_i \otimes \phi_i$.
Vejamos que $V_i^{\oplus a_i}$ é ainda um B-módulo de E isomorfo ao B-módulo $V_i \otimes \mathrm{Hom}_A(V_i, E)$, com a acção dada por $b \cdot (v_i \otimes \phi_i) = v_i \otimes b\phi_i$.
Com isto temos justificado os isomorfismos (1) e (2).
De facto, dado $b \in B = \mathrm{End}_A(E)$, como $\mathrm{Hom}_A(V_i^{\oplus a_i}, V_j^{\oplus a_j}) = \{0\}$ para $i \neq j$, pelo Lema 5.5, resulta que $b(V_i^{\oplus a_i}) \subseteq V_i^{\oplus a_i}$, o que prova que $V_i^{\oplus a_i}$ é um B-submódulo de E.
Além disso, o isomorfismo de A-módulos $\psi : V_i \otimes \mathrm{Hom}_A(V_i, E) \to V_i^{\oplus a_i}$ determinado por $\psi(v_i \otimes \phi_i) = \pi_i \circ \phi_i(v_i)$ onde $\pi_i : E \to V_i^{\oplus a_i}$ é a projecção, é compatível com a acção de B já que $\pi_i \in \mathrm{Hom}_B(E, V_i^{\oplus a_i})$ e

$$\begin{aligned}\psi(b \cdot (v_i \otimes \phi_i)) &= \psi(v_i \otimes b\phi_i) = \pi_i \circ b \circ \phi_i(v_i) \\ &= b \circ \pi_i \circ \phi_i(v_i) = b \cdot \psi(v_i \otimes \phi_i).\end{aligned}$$

□

Chamamos *Dualidade de Schur-Weyl* a esta correspondência bijectiva $V_i \leftrightarrow W_i$, as representações irredutíveis das álgebras A e B nas condições do Teorema, que não só garante que A e B têm o mesmo número de classes de isomorfismo de representações irredutíveis, como existe uma relação entre V_i e W_i, nomeadamente $W_i = \mathrm{Hom}_A(V_i, E)$.

5.3 Teorema de Schur

Um exemplo clássico da dualidade de Schur-Weyl é o caso em que uma das álgebras envolvidas no enunciado do Teorema do Duplo Centralizador é a álgebra de grupo do grupo simétrico.
Neste sentido seja V um espaço vectorial de dimensão finita, $k \geq 1$ e $E = V^{\otimes k}$. Então S_k actua em E do seguinte modo:

$$\sigma \cdot (v_1 \otimes \cdots \otimes v_k) = v_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma^{-1}(k)}.$$

Usa-se σ^{-1} nos índices para obrigar $\sigma_1(\sigma_2 \cdot v) = (\sigma_1\sigma_2) \cdot v$ para todo $\sigma_1, \sigma_2 \in S_k$ e para todo $v \in V^{\otimes k}$.
Atentando então neste espaço vectorial E, pode-se dizer que $g \in \mathrm{GL}(V)$ actua em E fazendo-se actuar em cada componente de E, i.e., $g \cdot (v_1 \otimes \cdots \otimes v_k) = gv_1 \otimes \cdots \otimes gv_k$.
Uma vez que usamos a teoria de representação do grupo S_k, nesta secção voltamos a tomar o corpo $\mathbb{C}$ dos complexos como corpo base. Apesar de $\mathrm{GL}(V)$ ser um grupo infinito, podemos

ainda considerar a álgebra de grupo $\mathbb{C}\mathrm{GL}(V)$ como o conjunto dos elementos da forma $\sum\limits_{g\in \mathrm{GL}(V)} \lambda_g g$ tal que $\{g \in \mathrm{GL}(V) : \lambda_g \neq 0\}$ é finito.
Então $\mathbb{C}\mathrm{GL}(V)$ é ainda uma álgebra cuja multiplicação é induzida pela composição em $\mathrm{GL}(V)$ e $E = V^{\otimes k}$ é uma representação de $\mathbb{C}\mathrm{GL}(V)$.
Sejam $\rho : \mathbb{C}\mathrm{GL}(V) \to \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(E)$ e $\vartheta : \mathbb{C}S_k \to \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(E)$ as representações correspondentes.
Sejam $\mathcal{A} = \mathrm{Im}\vartheta$ e $\mathcal{B} = \mathrm{Im}\rho$.
Seja $g \in \mathrm{GL}(V)$ e $\sigma \in S_k$. Como

$$\begin{aligned} g \cdot (\sigma \cdot (v_1 \otimes \cdots \otimes v_k)) &= g \cdot (v_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma^{-1}(k)}) \\ &= gv_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes gv_{\sigma^{-1}(k)} \\ &= \sigma \cdot (gv_1 \otimes \cdots \otimes gv_k) \\ &= \sigma \cdot (g \cdot (v_1 \otimes \cdots \otimes v_k)), \end{aligned}$$

temos que $\mathcal{B} \subseteq \mathrm{End}_{\mathcal{A}}(E)$ e $\mathcal{A} \subseteq \mathrm{End}_{\mathcal{B}}(E)$.
Além disso, como $\mathbb{C}S_k$ é uma álgebra semisimples, como vimos anteriormente, temos que o mesmo se verifica com a sua imagem homomorfa $\mathcal{A} = \mathrm{Im}\vartheta$. Portanto, para estarmos em condições de aplicar o Teorema do Duplo Centralizador é preciso estabelecer igualdades em $\mathcal{B} \subseteq \mathrm{End}_{\mathcal{A}}(E)$ e $\mathcal{A} \subseteq \mathrm{End}_{\mathcal{B}}(E)$. A prova de que estas inclusões são na realidade igualdades é um resultado conhecido por *Teorema de Schur*. A demonstração que apresentamos é baseada em [9, Theorem 4.2.10].

Teorema 5.3 (Teorema de Schur)**.** *Sejam V, $E = V^{\otimes k}$, $\mathcal{A} = \vartheta(\mathbb{C}S_k)$ e $\mathcal{B} = \rho(\mathbb{C}GL(V))$ como acima. Então*

$$\mathcal{B} = End_{\mathcal{A}}(E) \text{ e } \mathcal{A} = End_{\mathcal{B}}(E).$$

Demonstração. Como foi observado, $\mathcal{A}$ é semisimples e $\mathcal{B} \subseteq \mathrm{End}_{\mathcal{A}}(V^{\otimes k})$, logo pelo Teorema do Duplo Centralizador basta mostrar que $\mathrm{End}_{\mathbb{C}S_k}(V^{\otimes k}) = \mathrm{End}_{\mathcal{A}}(V^{\otimes k}) \subseteq \mathcal{B}$.
Seja $\{e_1, \ldots, e_n\}$ uma base de V. Para cada k-tuplo $I = (i_1, \ldots, i_k) \in \{1, \ldots, n\}^k$ definimos $e_I = e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_k}$. Notemos que $\{e_I\}_{I\in\{1,\ldots n\}^k}$ forma uma base de $V^{\otimes k}$.
Seja $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}S_k}(V^{\otimes k})$. Seja $(a_{I,J})$ a matriz de T relativamente à base $\{e_I\}$ antes vista.
Temos então que $Te_J = \sum_I a_{I,J} e_I$.

<u>Passo 1</u>: Ver que $a_{I,J} = a_{\sigma I,\sigma,J}$ para todo $\sigma \in S_k$.

Seja $\sigma \in S_k$ um elemento genérico. Temos então que

$$T\sigma e_J = Te_{\sigma J} = \sum_I a_{I,\sigma J} e_I,$$
$$\sigma T e_J = \sigma \sum_I a_{I,J} e_I = \sum_I a_{I,J} e_{\sigma I},$$

onde $\sigma I = \sigma(i_1, \ldots, i_k) = (i_{\sigma-1(1)}, \ldots, i_{\sigma-1(k)})$.

Como T comuta com σ temos que $T\sigma e_J = \sigma T e_J$. Logo temos que para todo $\sigma \in S_k$, $I, J \in \{1, \dots, n\}^k$ se tem $a_{I,\sigma J} = a_{\sigma^{-1}I,J}$. Esta última igualdade equivale a

$$a_{I,J} = a_{\sigma I,\sigma,J}, \tag{5.1}$$

para todo $I, J \in \{1, \dots, n\}^k$ e $\sigma \in S_k$.

<u>Passo 2</u>: Criar uma forma bilinear em $\mathrm{End}_{\mathbb{C}S_k}(V^{\otimes k})$ e ver que esta é não-degenerada.

Consideremos agora a seguinte forma bilinear simétrica não-degenerada em $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V^{\otimes k})$:

$$(X, Y) = \mathrm{tr}(XY).$$

Vamos ver que esta forma é não-degenerada em $\mathrm{End}_{\mathbb{C}S_k}(V^{\otimes k})$.
Comecemos por definir a seguinte função

$$\begin{aligned} \pi : \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V^{\otimes k}) &\to \mathrm{End}_{\mathbb{C}S_k}(V^{\otimes k}) \\ X &\mapsto \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} \sigma X \sigma^{-1}. \end{aligned}$$

Esta função é uma projecção. Se $(-,-)$ for degenerada em $\mathrm{End}_{\mathbb{C}S_k}(V^{\otimes k})$ então existe aqui um $T \neq 0$ tal que $(\mathrm{End}_{\mathbb{C}S_k}(V^{\otimes k}), T) = 0$.
Seja $X \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V^{\otimes k})$. Por hipótese temos que $0 = (\pi(X), T) = \frac{1}{k!}\sum_{\sigma \in S_k} \mathrm{tr}(\sigma X \sigma^{-1} T)$. Agora basta ver que $\sigma X \sigma^{-1} T = \sigma X T \sigma^{-1}$ por definição de T e que $\mathrm{tr}(\sigma X T \sigma^{-1}) = \mathrm{tr}(T\sigma^{-1}\sigma X) = \mathrm{tr}(TX)$.
Logo $0 = (\pi(X), T) = \frac{1}{k!}\sum_{\sigma \in S_k} \mathrm{tr}(TX) = (X, T)$. Como $(-,-)$ é não-degenerada em $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V^{\otimes k})$ e $X \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V^{\otimes k})$ é arbitrário, resulta que $T = 0$, o que contradiz a hipótese. Logo $(-.-)$ é não-degenerado em $\mathrm{End}_{\mathbb{C}S_k}(V^{\otimes k})$.

<u>Passo 3</u>: Ver que $\dim(\mathrm{End}_{\mathbb{C}S_k}(V^{\otimes k})) = \dim(\mathcal{B}) + \dim(\mathcal{B}^{\perp})$, onde $\mathcal{B}^{\perp}$ é o ortogonal a $\mathcal{B}$ em $\mathrm{End}_{\mathbb{C}S_k}(V^{\otimes k})$ relativamente à forma bilinear.

Comecemos por considerar as duas funções seguintes:

$$\begin{aligned} \theta : \mathrm{End}_{\mathbb{C}S_k}(V^{\otimes k}) &\to End_{\mathbb{C}S_k}(V^{\otimes k})^{\star} \\ X &\mapsto (X, -) \\ \psi : \mathrm{End}_{\mathbb{C}S_k}(V^{\otimes k}) &\to \mathcal{B}^{\star} \\ X &\mapsto (X, -) \end{aligned}$$

Olhando para a função ψ podemos concluir que $\dim(\mathrm{End}_{\mathbb{C}S_k}(V^{\otimes k})) = \dim(\ker(\psi)) + \dim(\mathrm{Im}(\psi))$, e $\ker(\psi)$ é exactamente a definição de $\mathcal{B}^{\perp}$.

Como $(-,-)$ é não-degenerado em $\mathrm{End}_{\mathbb{C}S_k}(V^{\otimes k})$ temos que θ tem de ser injectivo e como $\mathrm{End}_{\mathbb{C}S_k}(V^{\otimes k})$ tem dimensão finita então θ é sobrejectivo.
Seja $f \in \mathcal{B}^\star$, seja $\mathcal{X}$ um complementar de $\mathcal{B}$ em $\mathrm{End}_{\mathbb{C}S_k}(V^{\otimes k})$. Então existe $g \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}S_k}(V^{\otimes k})^\star$ tal que $g|_{\mathcal{B}} = f$ e $g|_{\mathcal{X}} = 0$. Pelo que já vimos, existe $y \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}S_k}(V^{\otimes k})$ tal que $g = \theta(y)$. Encontrado este y, podemos concluir que $f = \psi(y)$. Logo ψ é sobrejectiva. Logo $\dim(\mathrm{Im}(\psi)) = \dim \mathcal{B}^\star = \dim \mathcal{B}$.

Passo 4: Ver que $\mathcal{B}^\perp = \{0\}$.

Seja $g \in GL(n, \mathbb{C})$, representado pela matriz $(g_{i\,j})_{1 \leq i\,j \leq n}$ relativamente à base $\{e_1, \ldots, e_n\}$ de V. Então a entrada (I, J) da matriz da acção de g em $V^{\otimes k}$, $\rho(g)$, é dada por $g_{I,J} = g_{i_1,j_1} \cdot \ldots \cdot g_{i_k,j_k}$. Fixemos $T = (a_{I,J}) \in \mathcal{B}^\perp$. Temos então que:

$$0 = (T, \rho(g)) = \sum_{I,J \in \{1,\ldots,n\}^k} a_{I,J} g_{J,I} \tag{5.2}$$

$$= \sum_{I,J \in \{1,\ldots,n\}^k} a_{I,J} g_{j_1,i_1} \cdot \ldots \cdot g_{j_k,i_k} \tag{5.3}$$

Então, dado $X = (x_{i,j}) \in M_n(\mathbb{C})$ definimos

$$F(X) = \sum_{I,J \in \{1,\ldots,n\}^k} a_{I,J} x_{j_1,i_1} \cdot \ldots \cdot x_{j_k,i_k}.$$

Se X tem determinante diferente de 0, este pode ser visto como um elemento de $GL(V)$, logo podemos concluir de (5.3) que $X \mapsto \det(X)F(X)$ é a função constante igual a 0. Como $\mathbb{C}$ é um corpo infinito, podemos identificar a função definida em $M_n(\mathbb{C})$ com polinómios nas n^2 variáveis $x_{i\,j}$ com $1 \leq i, j \leq n$. No que resta da prova usaremos esta identificação.
Como $\det(X)F(X)$ é um polinómio nas entradas de X e $X \mapsto \det(X)$ não é a função nula, então F tem de o ser.
Vamos agora ver que isto implica que $T = (a_{I,J}) = 0$.
Seja $\Xi = \{(I, J), I, J \in \{1, \ldots n\}^k\}$. Temos que $\sigma \in S_k$ actua em Ξ via $\sigma(I, J) = (\sigma I, \sigma J)$.
Como $T \in End_{\mathbb{C}S_k}(V^{\otimes k})$ temos que a função

$$\Xi \to \mathbb{C}$$
$$(I, J) \mapsto a_{I,J}$$

é constante nas órbitas de S_k em Ξ, por (5.1).
Temos então a seguinte relação de equivalência em Ξ:

$$(I, J) \sim (I', J') \Leftrightarrow \exists \sigma \in S_k : (I, J) = \sigma(I', J')$$

Seja Γ um conjunto completo de representantes das diferentes classe de equivalência.

Seja $x_{I,J} := x_{i_1,j_1} \cdot \ldots \cdot x_{i_k,j_k}$. Notemos que $x_{\sigma I,\sigma J}$ é somente uma permutação dos factores de $x_{I,J}$, logo $x_{I,J} = x_{\sigma I,\sigma J}$.
Logo,

$$\begin{aligned} F(X) &= \sum_{I,J\in\{1,\ldots,n\}^k} a_{I,J} x_{J,I} \\ &= \sum_{\gamma\in\Gamma} n_\gamma a_\gamma x_{\overline{\gamma}} \end{aligned}$$

onde $n_\gamma = |S_k\gamma|$ é o cardinal da órbita de γ, e, se $\gamma = (I,J)$ então $a_\gamma = a_{I\,J}$ e $\overline{\gamma}$ é o representante em Γ da classe de equivalência de (J,I).
Logo $F(X) = 0$ implica $a_\gamma = 0$ para todo o γ em Γ, uma vez que os x_γ são linearmente independentes e que n_γ é inteiro positivo.
Logo T tem que ser a matriz nula, o que prova o teorema. $\square$

Vejamos agora com mais detalhe a construção que fizemos. Como anteriormente, sejam

$$\begin{aligned} &\rho : \mathbb{C}\mathrm{GL}(V) \to \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V^{\otimes k}) \text{ e} \\ &\vartheta : \mathbb{C}S_k \to \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V^{\otimes k}), \end{aligned}$$

e sejam ainda $\mathcal{I} = \ker\rho$ e $\mathcal{J} = \ker\vartheta$. Então $\mathcal{A} = \mathrm{Im}\vartheta \cong \mathbb{C}S_k/\mathcal{J}$ e $\mathcal{B} = \mathrm{Im}\rho \cong \mathbb{C}\mathrm{GL}(V)/\mathcal{I}$.
Seja $R \subseteq \mathbb{C}S_k$ um complemento de $\mathcal{J}$ (como espaço vectorial). Se $\mathcal{A} = \mathrm{Im}\vartheta$ então temos que $\mathcal{A} = \vartheta(R)$ e que $\vartheta|_R$ é uma bijecção sobre a imagem. Se W é uma representação de $\mathcal{A}$ então W é uma representação de $\mathbb{C}S_k$ para a acção $g \cdot w = \vartheta(g) \cdot w$, para todo o $g \in \mathbb{C}S_k$ e $w \in W$. Logo, para todo o $j \in \mathcal{J}$ e $w \in W$ temos que $j \cdot w = \vartheta(j)w = 0w = 0$.
Por outro lado, se W é uma representação de $\mathbb{C}S_k$ tal que $\mathcal{J} \cdot W = 0$ podemos definir uma acção de $\mathcal{A}$ em W dada por $a \cdot w = \vartheta|_R^{-1}(a) \cdot w$ para todo $a \in \mathcal{A}$ e $w \in W$.
Assim, existe uma correspondência bijectiva entre o conjunto das representações de $\mathcal{A}$ e o conjunto das representações W de S_k tais que $\mathcal{J} \cdot W = \{0\}$, e analogamente para $\mathcal{B}$ e $\mathrm{GL}(V)$. Estas correspondências preservam o isomorfismo, a irredutibilidade e as somas directas. Em particular, isto justifica a semisimplicidade de $\mathcal{A}$ e, pelo Teorema do Duplo Centralizador, implica a semisimplicidade de $\mathcal{B}$, embora $\mathbb{C}\mathrm{GL}(V)$ possa não ser semisimples.
Recordemos que, a menos de isomorfismo, as representações irredutíveis de S_k são parametrizadas pelas partições de k. Mais concretamente, dado $\lambda \vdash k$, $V_\lambda = \mathbb{C}S_k c_\lambda$ é a respectiva representação irredutível de S_k.
Seja $\mathcal{P}_k = \{\lambda \vdash k : \mathcal{J}V_\lambda = \{0\}\}$. Então $\{V_\lambda : \lambda \in \mathcal{P}_k\}$ é um conjunto completo de representantes das classes de isomorfismos das representações irredutíveis de $\mathcal{A}$ e qualquer representação de $\mathcal{A}$ é isomorfa a uma soma directa de elementos deste conjunto.
Obtemos então o seguinte resultado fundamental, que contribui em alguns dos aspectos da dualidade de Schur-Weyl.

Corolário 5.2. *Existem representações irredutíveis de dimensão finita de $GL(V)$, duas-a-duas não isomorfas, S^λ, para cada $\lambda \in \mathcal{P}_k$, tal que, como representação de $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$,*

$$V^{\otimes k} \cong \bigoplus_{\lambda \in \mathcal{P}_k} V_\lambda \otimes S^\lambda.$$

Além disso, $\dim S^\lambda$ *é a multiplicidade de V_λ na decomposição de $V^{\otimes k}$ em soma directa de representações irredutíveis de S_k.*

Notemos que se $\dim V \geq k$ então ϑ é injectiva. De facto, se $e_1, \dots, e_k$ são elementos linearmente independentes de V e $\mu = \sum_{\sigma \in S_k} n_\sigma \sigma \in \ker \vartheta$, então obtemos

$$0 = \mu \cdot (e_1 \otimes e_2 \otimes \cdots \otimes e_k) = \sum_{\sigma \in S_k} n_\sigma (e_{\sigma^{-1}(1)} \otimes e_{\sigma^{-1}(2)} \otimes \cdots \otimes e_{\sigma^{-1}(k)}),$$

o que implica que $n_\sigma = 0$ para todo o $\sigma \in S_k$, porque os elementos $e_{\sigma^{-1}(1)} \otimes e_{\sigma^{-1}(2)} \otimes \cdots \otimes e_{\sigma^{-1}(k)}$ com σ a variar em S_k são linearmente independentes em $V^{\otimes k}$. Logo $\mu = 0$ e ϑ é injectiva. Assim, $\mathcal{J} = \{0\}$, que por sua vez implica que $\mathcal{P}_k$ contenha todas as partições de k. Assim sendo, para todo k nestas condições e para toda a partição λ de k, temos que a representação irredutível S^λ é isomorfa a alguma subrepresentação de $V^{\otimes k}$, se virmos este como representação de $\mathrm{GL}(V)$.
Finalmente vamos ver o seguinte lema, que nos descreve de modo mais explicito o que é o espaço S^λ, mais propriamente, mostra que $S^\lambda = c_\lambda V^{\otimes k}$.

Lema 5.7. *Seja $c_\lambda \in \mathbb{C}S_k$ como definida anteriormente. Seja V_λ a representação irredutível de $\mathbb{C}S_k$ associada a λ. Temos então que*

$$Hom_{\mathbb{C}S_k}(V_\lambda, V^{\otimes k}) \cong c_\lambda V^{\otimes k}$$

como $GL(V)$-módulos, onde $g \in GL(V)$ actua em $Hom_{\mathbb{C}S_k}(V_\lambda, V^{\otimes k})$ via $g \cdot f = g \circ f$ para todo o $f \in Hom_{\mathbb{C}S_k}(V_\lambda, V^{\otimes})$.

Demonstração. Graças ao Teorema de Schur temos que $gc_\lambda V^{\otimes k} = c_\lambda g V^{\otimes k} \subseteq c_\lambda V^{\otimes k}$, logo $c_\lambda V^{\otimes k}$ é efectivamente um $\mathrm{GL}(V)$-módulo.
Consideremos a seguinte função

$$\begin{aligned} \psi : \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}S_k}(V_\lambda, V^{\otimes k}) &\to c_\lambda V^{\otimes k}. \\ f &\mapsto f(c_\lambda) \end{aligned}$$

Relembremos que $V_\lambda = \mathbb{C}S_k c_\lambda$, que $c_\lambda^2 = n_\lambda c_\lambda$ e que $V_\lambda V_\lambda \neq \{0\}$, logo temos que $n_\lambda \neq 0$ (ver Lema 4.2 e prova do Lema 4.3). Assim sendo, temos que $f(c_\lambda) = f(n_\lambda^{-1} c_\lambda^2) = c_\lambda f(n_\lambda^{-1} c_\lambda) \in c_\lambda V^{\otimes k}$, e portanto a função ψ está bem definida.
Vamos agora ver que ψ é um homomorfismo de $\mathrm{GL}(V)$-módulos.

Sejam $f, g \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}S_k}(V_\lambda, V^{\otimes k})$ e $\alpha \in \mathbb{C}$. Como

$$\psi(f + \alpha g) = (f + \alpha g)(c_\lambda) = f(c_\lambda) + \alpha g(c_\lambda) = \psi(f) + \alpha\psi(g),$$

então ψ é um homomorfismo. Resta então ver que ψ comuta com a acção de $h \in \mathrm{GL}(V)$. Temos então que

$$\psi(hf) = (hf)(c_\lambda) = h(f(c_\lambda)) = h\psi(f).$$

Logo ψ é um homomorfismo de $\mathrm{GL}(V)$-módulos.
Falta então ver que a função ψ é bijectiva.
Vamos começar por estudar a sua injectividade e para isso vamos ver qual é o núcleo de ψ.
Se $f(c_\lambda) = 0$ então

$$0 = f(c_\lambda) = \mathbb{C}S_k f(c_\lambda) = f(\mathbb{C}S_k c_\lambda) = f(V_\lambda),$$

e portanto f tem que ser a função nula. Logo temos que ψ é injectiva.
Falta ver a sobrejectividade de ψ. Seja $b = c_\lambda v \in c_\lambda V^{\otimes k}$, com $v \in V^{\otimes k}$. Definimos a função $f : V_\lambda \to V^{\otimes k}$ dada por $f(w) = n_\lambda^{-1} w b \in \mathbb{C}S_k c_\lambda V^{\otimes k} \subseteq V^{\otimes k}$ para todo o $w \in V_\lambda$. Facilmente se verifica que $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}S_k}(V_\lambda, V^{\otimes k})$. Notemos ainda que

$$\psi(f) = f(c_\lambda) = n_\lambda^{-1} c_\lambda b = n_\lambda^{-1} c_\lambda^2 v = c_\lambda v = b.$$

Logo ψ é sobrejectiva, o que conclui a demonstração. $\square$

Capítulo 6

Dualidade de Schur-Weyl e Caminhos em Cubos

Neste capítulo vamos abordar o conceito de *grafo de representação de G associado à representação V* e estudar a matriz de adjacência deste grafo. Vamos estudar o caso particular em que $G = \mathbb{Z}_2^n$ e V é uma representação de G de dimensão n. Recorrendo à dualidade de Schur-Weyl, vamos procurar descrever as representações irredutíveis da álgebra centralizadora $\mathrm{End}_G(V^{\otimes k})$. Vamos ainda estudar esta álgebra centralizadora no caso em que G é o grupo *hiperoctaedral*.
O capítulo expõe os resultados do artigo [2] e baseia-se nesse mesmo artigo, embora algumas provas tenham sido simplificadas.

6.1 O Hipercubo

Sejam G um grupo (finito), V uma representação de G e $\{G_\lambda \mid \lambda \in \Lambda(G)\}$ um conjunto completo de representantes das diferentes classes de isomorfismo das representações irredutíveis de G, onde $\Lambda(G)$ é somente um conjunto de índices, com um índice por cada classe de conjugação de G. Temos então que toda a representação de G é isomorfa a uma soma directa unicamente determinada (a menos de permutação das parcelas) destas representações irredutíveis.
Como todo o grupo admite a representação irredutível trivial, vamos considerar $0 \in \Lambda(G)$ e chamar G_0 à representação irredutível trivial.
Vamos então criar um grafo orientado em função de G e V, designado por $\mathcal{R}_V(G)$, cujos vértices são os elementos de $\Lambda(G)$. O número de arestas que ligam λ a μ é $a_{\lambda,\mu}$, onde $a_{\lambda,\mu}$ é a multiplicidade de G_μ em $G_\lambda \otimes V$. Este grafo chama-se o grafo de representação de G associado a V.
A partir de agora usaremos a notação nV para representar $V^{\oplus n}$. Nesta nova notação, a

propriedade $(V^{\oplus n})^{\oplus m} = V^{\oplus nm}$ pode ser facilmente reescrita como $m(nV) = mnV$, tornando a utilização desta propriedade mais intuitiva.
Dada esta definição de $a_{\lambda,\mu}$ e esta nova notação temos que:

$$G_\lambda \otimes V \cong \bigoplus_{\mu \in \Lambda(G)} a_{\lambda,\mu} G_\mu.$$

Seja então A a matriz de adjacência deste grafo. A proposição seguinte mostra que a entrada (λ, μ) da matriz A^k corresponde à multiplicidade de G_μ em $G_\lambda \otimes V^{\otimes k}$.

Proposição 6.1. *Seja A a matriz de adjacência de um grafo de representação $\mathcal{R}_V(G)$, em que as linhas e as colunas estão indexadas pelos elementos de $\Lambda(G)$. Seja $a_{\lambda,\mu,k}$ a entrada (λ, μ) de A^k. Então*

$$G_\lambda \otimes V^{\otimes k} = \bigoplus_{\mu \in \Lambda(G)} a_{\lambda,\mu,k} G_\mu. \tag{6.1}$$

Demonstração. Vamos provar isto por indução em k. O caso $k = 1$ corresponde à definição de $\mathcal{R}_V(G)$ e de matriz de adjacência.
Vamos assumir que a igualdade (6.1) se verifica para algum $k \geq 1$, e ver que isto implica a sua veracidade para $k + 1$.
Temos,

$$\begin{aligned}
G_\lambda \otimes V^{\otimes k+1} &= G_\lambda \otimes V^{\otimes k} \otimes V \\
&\overset{\text{H.I.}}{=} \left(\bigoplus_{\mu \in \Lambda(G)} a_{\lambda,\mu,k} G_\mu \right) \otimes V \\
&= \bigoplus_{\mu \in \Lambda(G)} a_{\lambda,\mu,k} G_\mu \otimes V \\
&= \bigoplus_{\mu \in \Lambda(G)} a_{\lambda,\mu,k} \bigoplus_{\nu \in \Lambda(G)} a_{\mu,\nu,1} G_\nu \\
&= \bigoplus_{\mu,\nu \in \Lambda(G)} a_{\lambda,\mu,k} a_{\mu,\nu,1} G_\nu,
\end{aligned}$$

onde H.I. refere-se ao facto de estarmos a utilizar a hipótese de indução. Fixando ν, temos que $\sum_{\mu \in \Lambda(G)} a_{\lambda,\mu,k} a_{\mu,\nu,1}$ é exactamente a entrada (λ, ν) do produto das matrizes A^k e A, e este produto por sua vez é A^{k+1}, o que conclui a demonstração. $\square$

Nota. Temos que $a_{\lambda,\mu,k}$ é o número de caminhos no grafo $\mathcal{R}_V(G)$ de λ até μ de comprimento k. Este facto bem conhecido prova-se facilmente por indução.

Consideremos agora que V é uma representação de dimensão n e seja $\{e_1, \ldots, e_n\}$ uma base. Considerando esta base, podemos definir a acção do grupo simétrico S_n em V dada por permutação dos elementos da base. Com isto, temos que a acção de cada elemento do grupo simétrico está associada a uma matriz que é uma matriz de permutação correspondente. Consideremos as matrizes escritas nesta base obtidas a partir das matrizes de permutação, mas onde as entradas diferentes de 0 podem ser 1 ou -1. Este conjunto de matrizes forma um grupo chamado Grupo Hiperoctaedral, que se denota por $G(2,1,n)$.

Nota. Esta notação para o grupo hiperoctaedral deve-se ao facto de este grupo fazer parte de uma família de grupos que dependem de três argumentos p, m e n. Temos que $G(p,m,n)$ é o subgrupo do semigrupo multiplicativo $M_n(\mathbb{C})$ gerado pelas matrizes de permutação e pelas matrizes diagonais com entradas da forma $\zeta^{i_1}, \ldots, \zeta^{i_n}$ onde $i_1, \ldots, i_n \in \mathbb{N}$, $i_1 + \cdots + i_n \equiv 0 \pmod m$ e ζ é uma p-ésima raiz primitiva da unidade.

Na sequência da nota, temos que o grupo hiperoctaedral admite dois subgrupos particularmente interessantes, pois são disjuntos (a menos do elemento neutro) e juntos formam um conjunto de geradores do grupo. Um destes subgrupos é grupo formado pelas matrizes de permutação, que é isomorfo ao grupo simétrico, e o outro subgrupo é o grupo formado pelo conjunto das matrizes diagonais onde a diagonal só admite elementos 1 ou -1. Este segundo subgrupo é isomorfo a $\mathbb{Z}_2^n$, sendo consequentemente abeliano.
Como $\mathbb{Z}_2^n$ é abeliano, todas as suas representação irredutíveis têm dimensão 1, logo $\mathbb{Z}_2^n$ tem tantos elementos como classes de isomorfismo de representações irredutíveis.
Para todo o $a \in \mathbb{Z}_2^n$ vamos criar uma representação V_a de $\mathbb{Z}_2^n$ de dimensão 1, e consequentemente irredutível. Como V_a tem dimensão 1, podemos dizer que $V_a = \mathbb{C}v_a$.
Definimos a acção de $\mathbb{Z}_2^n$ em V_a por $bv_a = (-1)^{b\cdot a}v_a$, onde $b \in \mathbb{Z}_2^n$ e $b \cdot a$ é o produto interno usual entre vectores. Daqui em diante $\cdot$ será usado exclusivamente para denotar o produto interno entre vectores.
Vamos ver que esta operação é efectivamente uma acção. Sejam $a, b, c \in \mathbb{Z}_2^n$. Observemos que

$$(a+b)v_c = (-1)^{(a+b)\cdot c}v_c \overset{(1)}{=} (-1)^{(a+b)\cdot c}v_c = (-1)^{a\cdot c}(-1)^{b\cdot c}v_c = a(bv_c).$$

À esquerda de (1) o sinal de adição representa a soma de elementos de $\mathbb{Z}_2^n$ e a partir daqui o sinal de adição representa a soma de elementos de $\mathbb{C}^n$. Como estamos a trabalhar com uma potência em que a base é -1, e $(-1)^0 = (-1)^2$, temos que em ambos os lados da igualdade o coeficiente de v_c é o mesmo. Logo temos de facto que V_c é um $\mathbb{Z}_2^n$-módulo.
Consideremos agora $a, b \in \mathbb{Z}_2^n$ tais que $a \neq b$. Vamos ver que $V_a \ncong V_b$.
Seja $\phi : V_a \to V_b$ um $\mathbb{Z}_2^n$-homomorfismo. Para todo o $c \in \mathbb{Z}_2^n$ temos que

$$\begin{aligned} c\phi(v_a) &= c\lambda v_b = \lambda(-1)^{c\cdot b}v_b \\ \phi(cv_a) &= \phi((-1)^{c\cdot a}v_a) = \lambda(-1)^{c\cdot a}v_b. \end{aligned}$$

Logo, como ϕ é um $\mathbb{Z}_2^n$-homomorfismo, se λ for diferente de 0 então para todo o $c \in \mathbb{Z}_2^n$ temos que $(-1)^{c \cdot b} = (-1)^{c \cdot a}$, e isto implica a e b a serem iguais em todas as suas entradas. Logo V_a e V_b são isomorfos se e só se $a = b$.
Temos então encontradas todas as representações irredutíveis de $\mathbb{Z}_2^n$ (a menos de isomorfismo).
Uma propriedade interessante destas representações irredutíveis é a seguinte:

Lema 6.1. *Sejam $a, b \in \mathbb{Z}_2^n$. Então:*

$$V_a \otimes V_b \cong V_{a+b}.$$

Demonstração. Os dois espaços têm dimensão 1 porque $V_a \otimes V_b = \mathbb{C}v_a \otimes v_b$.
Já sabemos como é que $c \in \mathbb{Z}_2^n$ actua em V_{a+b}, logo basta ver como é que c actua num elemento não nulo de $V_a \otimes V_b$:

$$c(v_a \otimes v_b) = (-1)^{c \cdot a}(-1)^{c \cdot b} v_a \otimes v_b = (-1)^{c \cdot (a+b)} v_a \otimes v_b,$$

o que coincide com a acção de c em V_{a+b}, logo $V_a \otimes V_b \cong V_{a+b}$. $\square$

Seja $V = V_{\epsilon_1} \oplus \cdots \oplus V_{\epsilon_n}$, onde ϵ_i é o elemento de $\mathbb{Z}_2^n$ que tem todas as entradas iguais a 0 excepto a i-ésima, que é 1.
Utilizando o último lema, vamos procurar descrever $\mathcal{R}_V(\mathbb{Z}_2^n)$. Comecemos por ver que, para $a \in \mathbb{Z}_2^n$, temos que $V_a \otimes V = V_{a+\epsilon_1} \oplus \cdots \oplus V_{a+\epsilon_n}$, o que implica que há exactamente uma aresta que liga a a todos os elementos de $\mathbb{Z}_2^n$ que diferem de a em exactamente uma coordenada. Como $a + \epsilon_i + \epsilon_i = a$, temos que se a está ligado a um elemento de $\mathbb{Z}_2^n$ então este também está ligado a a. Dada esta simetria que existe nas arestas do grafo podemos simplesmente considerar cada par de arestas que ligam um mesmo par de vértices (em sentidos opostos) como sendo uma só aresta, e assim temos um novo grafo não orientado. Como cada elemento de $\mathbb{Z}_2^n$ está ligado aos elementos de $\mathbb{Z}_2^n$ que diferem em exactamente uma coordenada, temos que $\mathcal{R}_V(\mathbb{Z}_2^n)$ é o hipercubo de dimensão n (também conhecido por n-cubo).

6.2 Matrizes de Adjacência

Seja $\mathcal{G}$ um grafo não orientado e seja $\mathcal{V}$ o seu conjunto de vértices. Seja A a sua matriz de adjacência. Neste caso as linhas e colunas de A estão indexadas pelos elementos de $\mathcal{V}$. Como $\mathcal{G}$ é não orientado temos que A é uma matriz real e simétrica. Logo temos que A é diagonalizável e tem valores próprios reais λ_u, com $u \in \mathcal{V}$, com vectores próprios associados $\epsilon_u = (\epsilon_{w,u})_{w \in \mathcal{V}}$, onde estes vectores próprios são ortonormados. Usaremos a terminologia caminho para designar uma sequência de vértices tais que para cada par de vértices consecutivos existe uma aresta que incide em ambos os vértices. Assim sendo, temos que um caminho pode passar múltiplas vezes por um mesmo vértice.
Provas alternativas dos resultados desta secção podem ser consultadas em [12].

Proposição 6.2. *O número de caminhos em $\mathcal{G}$ do vértice v para o vértice w de comprimento k é:*

$$\sum_{u\in\mathcal{V}} \epsilon_{v,u}\epsilon_{w,u}\lambda_u^k$$

Demonstração. O número de caminhos em $\mathcal{G}$ de v para w de comprimento k é a entrada (v,w) de A^k.
Temos que $\epsilon^{-1}A\epsilon = D$ é a matriz diagonal formada pelos valores próprios, onde ϵ é a matriz de mudança de base cujas colunas são as coordenadas dos vectores próprios ϵ_u. Como esta base é ortonormada, temos que ϵ é uma matriz ortogonal. Então:

$$\begin{aligned} &(\epsilon^{-1}A\epsilon)^k = D^k \\ \Leftrightarrow &\epsilon^{-1}A^k\epsilon = D^k \\ \Leftrightarrow &A^k = \epsilon D^k\epsilon^{-1} \\ \Leftrightarrow &A^k = \epsilon D^k\epsilon^t. \end{aligned}$$

Logo, a entrada (v,w) de A^k é dada por $\sum_{u\in\mathcal{V}} \epsilon_{v,u}\lambda_u^k\epsilon^t_{u,w} = \sum_{u\in\mathcal{V}} \epsilon_{v,u}\lambda_u^k\epsilon_{w,u}$. $\square$

Vamos agora considerar o caso particular em que $\mathcal{G}$ é grafo da representação do grupo $\mathbb{Z}_2^n$ relativamente a uma representação V, não obrigatoriamente aquela que torna $\mathcal{R}_V(\mathbb{Z}_2^n)$ no hipercubo.
Seja S um subconjunto arbitrário não-vazio de $\mathbb{Z}_2^n$. Seja $V_S = \bigoplus_{s\in S} V_s$. Pelo que vimos anteriormente, temos que $V_a \otimes V_S = \bigoplus_{s\in S} V_{a+s}$. O nosso objectivo passa por estudar $\mathcal{R}_{V_S}(\mathbb{Z}_2^n)$, mais particularmente os valores e vectores próprios da matriz de adjacência destes grafos.
Vamos também definir uma função $h : \mathbb{Z}_2^n \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ que atribui a $a \in \mathbb{Z}_2^n$ o número de entradas do vector a diferentes de 0. Esta função é conhecida como o *peso de Hamming*.

Lema 6.2. *Tendo em conta as definições acabadas de fazer, seja A_S a matriz de adjacência de $\mathcal{R}_{V_S}(\mathbb{Z}_2^n)$. Então para cada $a \in \mathbb{Z}_2^n$ temos que $\lambda_a = \sum_{s\in S}(-1)^{a\cdot s}$ é valor próprio de A_S, com vector próprio associado $\epsilon_a = \sum_{b\in\mathbb{Z}_2^n}(-1)^{a\cdot b}\underline{b}$, onde $\underline{b}$ é o vector coluna $2^n \times 1$ com 0 em todas as entradas excepto na associada a b, que tem valor 1.*

Demonstração. Vamos então verificar que isto é verdade, calculando $A_S\epsilon_a$. Para isto vamos começar por ver quanto é $A_S\underline{b}$. Este produto é exactamente a coluna associada a b de A_S.
Seja $S = \{s_1, \ldots, s_m\}$, com $|S| = m$. Então

$$V_a \otimes V_S = V_a \otimes (V_{s_1} \oplus \cdots \oplus V_{s_m}) = V_{a+s_1} \oplus \cdots \oplus V_{a+s_m}.$$

Se $b = a + s$ então $a = b + s$, pois estamos em $\mathbb{Z}_2^n$, logo a coluna b de A_S vale 0 em todas as entradas menos nas associadas a elementos da forma $b + s$ com $s \in S$, que têm valor 1.
Logo $A_S\underline{b} = \sum_{s\in S}\underline{b+s}$.

Portanto:

$$\begin{aligned}
A_S\epsilon_a =& A_S\sum_{b\in\mathbb{Z}_2^n}(-1)^{a\cdot b}\underline{b}\\
=&\sum_{b\in\mathbb{Z}_2^n}(-1)^{a\cdot b}A_S\underline{b}\\
=&\sum_{b\in\mathbb{Z}_2^n}(-1)^{a\cdot b}\sum_{s\in S}\underline{b+s}\\
=&\sum_{s\in S}\sum_{b\in\mathbb{Z}_2^n}(-1)^{a\cdot b}\underline{b+s}\\
=&\sum_{s\in S}\sum_{c\in\mathbb{Z}_2^n}(-1)^{a\cdot(c+s)}\underline{c}\\
=&\sum_{s\in S}(-1)^{a\cdot s}\sum_{c\in\mathbb{Z}_2^n}(-1)^{a\cdot c}\underline{c}\\
=&\sum_{s\in S}(-1)^{a\cdot s}\epsilon_a\\
=&\lambda_a\epsilon_a.
\end{aligned}$$

Notemos que, fixando o s e fazendo variar b em $\mathbb{Z}_2^n$, $b+s$ é igual a cada um dos elementos de $\mathbb{Z}_2^n$ exactamente uma vez, logo podemos fazer a mudança de variável $c=b+s$ e mudar também o índice do somatório para $c\in\mathbb{Z}_2^n$. □

Vamos ainda ver que os vectores ϵ_a com $a\in\mathbb{Z}_2^n$ são dois-a-dois ortogonais, calculando o produto interno (usual) entre vectores desta forma.

$$\epsilon_a\cdot\epsilon_{a'}=\sum_{b\in\mathbb{Z}_2^n}(-1)^{a\cdot b}(-1)^{a'\cdot b}=\sum_{b\in\mathbb{Z}_2^n}(-1)^{(a+a')\cdot b}$$

Se $a=a'$ então $\epsilon_a\cdot\epsilon_{a'}=2^n$, uma vez que $a+a'=0$.
Se $a\neq a'$ então $a+a'\neq 0$. Para cada vector $b\in\mathbb{Z}_2^n$ temos que o termo do sumatório associado a b é 1 ou -1 dependendo se o conjunto formado pela intersecção das entradas de valor 1 de $a+a'$ e de b for par ou ímpar, respectivamente. Como $a+a'\neq 0$ então o conjunto formado pelas entradas de valor 1 de $a+a'$ é não vazio, e assim sendo admite tantos subconjuntos pares quantos ímpares. Logo o valor da soma é 0.
Logo o conjunto $\left\{\frac{1}{2^{\frac{n}{2}}}\epsilon_a \mid a\in\mathbb{Z}_2^n\right\}$ forma uma base ortonormada de $\mathbb{C}^{2^n}$.
Tomando no lema o caso particular em que $S=\{\epsilon_i \mid i\in\{1,\ldots,n\}\}$ temos os seguintes corolários:

Corolário 6.1. *Seja A a matriz de adjacência do n-cubo. Então A tem valores próprios $\lambda_a=n-2h(a)$ para $a\in\mathbb{Z}_2^n$, com vector próprio associado $\epsilon_a=\sum_{b\in\mathbb{Z}_2^n}(-1)^{a\cdot b}\underline{b}$, e estes vectores formam uma base ortogonal de $\mathbb{C}^{2^n}$. O valor próprio $n-2h$, com $h\in\{0,1,\ldots,n\}$ tem multiplicidade $\binom{n}{h}$.*

Demonstração. Basta só ver porque é que $\lambda_a = n - 2h(a)$, sendo o resto do corolário consequência directa do lema.
Seja $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{Z}_2^n$. Logo temos que

$$\lambda_a = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{a\cdot\epsilon_i} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{\delta_{a_i,1}} = (n - h(a)) - h(a) = n - 2h(a).$$

□

Corolário 6.2. *Dados $b, c \in \mathbb{Z}_2^n$, seja $h = h(b + c)$, o número de posições em que b e c diferem. Então o número de caminhos de b para c de comprimento k no n-cubo é dado por*

$$\frac{1}{2^n} \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{h} (-1)^j \binom{h}{j} \binom{n-h}{i-j} (n - 2i)^k.$$

Demonstração. Comecemos por pegar na base ortonormada $\left\{ \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}} \epsilon_a \mid a \in \mathbb{Z}_2^n \right\}$. Uma vez que a matriz A, matriz de adjacência do n-cubo, é simétrica podemos usar a Proposição 6.2.
Temos então que:

$$\begin{aligned}
(A^k)_{b,c} &= 2^{-n} \sum_{u \in \mathbb{Z}_2^n} \epsilon_{b,u} \epsilon_{c,u} \lambda_u^k \\
&= 2^{-n} \sum_{u \in \mathbb{Z}_2^n} (-1)^{u\cdot b} (-1)^{u \cdot c} (n - 2h(u))^k \\
&= 2^{-n} \sum_{u \in \mathbb{Z}_2^n} (-1)^{u\cdot(b+c)} (n - 2h(u))^k.
\end{aligned}$$

Vamos agora fixar $h(u) = i$, com $i \in \{0, \ldots, n\}$. Então existem $j \in \{0, \ldots, h\}$ posições em que u e $b + c$ têm ambos 1 e $i - j$ posições em que u tem 1 e $b + c$ tem 0. Fixando i e j, existem $\binom{h}{j}\binom{n-h}{i-j}$ vectores u nestas condições. Com estas variáveis i e j, temos que $(-1)^{u\cdot(b+c)} = (-1)^j$ e que $n - 2h(u) = n - 2i$.
Logo

$$\begin{aligned}
(A^k)_{b,c} &= 2^{-n} \sum_{u \in \mathbb{Z}_2^n} (-1)^{u\cdot(b+c)} (n - 2h(u))^k \\
&= 2^{-n} \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{h} \binom{h}{j} \binom{n-h}{i-j} (-1)^j (n - 2i)^k.
\end{aligned}$$

□

6.3 Álgebras centralizadoras

Dado um grupo G e uma representação V de G, definimos a álgebra centralizadora $Z_k(G)$ como sendo $\mathrm{End}_G(V^{\otimes k}) = \{z \in \mathrm{End}(V^{\otimes k}) \mid z(gw) = gz(w)\, \forall g \in G, w \in V^{\otimes k}\}$.

Se V for uma representação fiel de G, então pela Proposição 3.5, temos que todas as representações irredutíveis de G são isomorfas a alguma subrepresentação de $V^{\otimes k}$ para algum k positivo. Logo, no grafo de representação $\mathcal{R}_V(G)$, temos que 0 tem ligações para todos os elementos de $\Lambda(G)$ pois $G_0 \otimes V^{\otimes k} \cong V^{\otimes k}$ e este espaço, para k adequado, contém representações isomorfas a G_λ na sua decomposição em soma directa de representações irredutíveis. Logo, ignorando orientações, temos que $\mathcal{R}_V(G)$ é conexo. Na realidade, é possível mostrar que $\mathcal{R}_V(G)$ é fortemente conexo, isto é, $\mathcal{R}_V(G)$ é conexo sem ser preciso ignorar orientações.

Notemos que pode não ser possível ver $\mathbb{C}G$ como uma subálgebra de $\mathrm{End}(V^{\otimes k})$, pois o homomorfismo de representação $\phi : \mathbb{C}G \to \mathrm{End}(V^{\otimes k})$ não tem que ser injectivo, nem mesmo para $k = 1$. Assim sendo, para se poder utilizar o *Teorema do Duplo Centralizador*, temos que, usando a notação do enunciado do teorema, a nossa álgebra A é $\phi(\mathbb{C}G)$ e a álgebra B será então $Z_k(G)$.

Seja $\Lambda_k(G)$ o subconjunto de $\Lambda(G)$ tal que $\lambda \in \Lambda_k(G)$ equivale a G_λ ter multiplicidade positiva como factor de $V^{\otimes k}$.

O Teorema do Duplo Centralizador dá-nos então o seguinte:

- $Z_k(G)$ é semisimples e as representações irredutíveis de $Z_k(G)$ estão em bijecção com os elementos de $\Lambda_k(G)$. Denotamos por Z_k^λ a representação irredutível de $Z_k(G)$ associada a $\lambda \in \Lambda_k(G)$.

- $V^{\otimes k} \cong G_0 \otimes V^{\otimes k} \cong \bigoplus_{\lambda \in \Lambda_k(G)} m_k^\lambda G_\lambda$, onde m_k^λ é a multiplicidade de G_λ em $V^{\otimes k}$. Como $V^{\otimes k} \cong G_0 \otimes V^{\otimes k}$, m_k^λ é também o número de caminhos em $\mathcal{R}_V(G)$ de 0 até λ de comprimento k.

- Decompondo $V^{\otimes k}$ como soma de representações irredutíveis de $Z_k(G)$, temos $V^{\otimes k} \cong \bigoplus_{\lambda \in \Lambda_k(G)} d_\lambda Z_k^\lambda$, onde $d_\lambda = \dim G_\lambda$. Esta última igualdade é consequência da demonstração do Teorema do Duplo Centralizador, de onde também tiramos, de modo análogo, que $m_k^\lambda = \dim Z_k^\lambda$.

- Se $\mathcal{R}_V(G)$ tiver uma matriz de adjacência simétrica, temos também como consequência da prova do Teorema do Duplo Centralizador que

  $$\dim Z_k(G) = \sum_{\lambda \in \Lambda_k(G)} (\dim Z_k^\lambda)^2 = \sum_{\lambda \in \Lambda_k(G)} (m_k^\lambda)^2 = m_{2k}^0$$

  pois $(m_k^\lambda)^2$ pode contar como ir de 0 até λ em k passos e depois voltar para 0 no mesmo número de passos.

Voltando então a considerar o caso em que $G = \mathbb{Z}_2^n$ e $V = V_{\epsilon_1} \oplus \cdots \oplus V_{\epsilon_n}$ temos que:

- Fixemos $a \in \mathbb{Z}_2^n$. Então

$$\dim Z_k^a = m_k^a = 2^{-n} \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{h} \binom{h}{j} \binom{n-h}{i-j} (-1)^j (n-2i)^k,$$

  onde $h = h(a)$. Logo, se $b \in \mathbb{Z}_2^n$ tal que $h(a) = h(b)$ então $\dim Z_k^a = \dim Z_k^b$.

- Como $h(0) = 0$, onde o primeiro 0 é referente ao elemento neutro de $\mathbb{Z}_2^n$, temos que

$$\begin{aligned}\dim Z_k(\mathbb{Z}_2^n) = m_{2k}^0 &= 2^{-n} \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{0} \binom{0}{j} \binom{n-0}{i-j} (-1)^j (n-2i)^k \\ &= 2^{-n} \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (n-2i)^{2k}\end{aligned}$$

Vamos agora construir explicitamente uma base de $Z_k(\mathbb{Z}_2^n)$. Relembremos que

$$V = V_{\epsilon_1} \oplus \cdots \oplus V_{\epsilon_n}.$$

Para cada $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_k) \in \{1, \ldots, n\}^k$, seja $x_\beta = x_{\beta_1} \otimes \cdots \otimes x_{\beta_k}$, onde $x_i = v_{\epsilon_i} \in V_{\epsilon_i}$. Temos que $\{x_\beta = x_{\beta_1} \otimes \cdots \otimes x_{\beta_k} \mid \beta \in \{1, \ldots, n\}^k\}$ forma uma base de $V^{\otimes k}$.
Seja $a \in \mathbb{Z}_2^n$. Temos que:

$$a x_\beta = (-1)^{a \cdot (\epsilon_{\beta_1} + \cdots + \epsilon_{\beta_k})} x_\beta.$$

Seja $\Phi \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V^{\otimes k})$ uma aplicação linear. Para $\alpha \in \{1, \ldots, n\}^k$, temos então que:

$$\Phi x_\alpha = \sum_{\beta \in \{1, \ldots, n\}^k} \Phi_\alpha^\beta x_\beta,$$

onde $\Phi_\alpha^\beta \in \mathbb{C}$ para todos $\alpha, \beta \in \{1, \ldots, n\}^k$. Seja $a \in \mathbb{Z}_2^n$. Então:

$$\begin{aligned}a(\Phi x_\alpha) &= a \sum_{\beta \in \{1, \ldots, n\}^k} \Phi_\alpha^\beta x_\beta = \sum_{\beta \in \{1, \ldots, n\}^k} (-1)^{a \cdot (\epsilon_{\beta_1} + \cdots + \epsilon_{\beta_k})} \Phi_\alpha^\beta x_\beta, \\ \Phi(a x_\alpha) &= \Phi((-1)^{a \cdot (\epsilon_{\alpha_1} + \cdots + \epsilon_{\alpha_k})} x_\alpha) = \sum_{\beta \in \{1, \ldots, n\}^k} (-1)^{a \cdot (\epsilon_{\alpha_1} + \cdots + \epsilon_{\alpha_k})} \Phi_\alpha^\beta x_\beta.\end{aligned}$$

Se $\Phi \in Z_k(\mathbb{Z}_2^n)$ então $\Phi \circ a$ e $a \circ \Phi$ têm de ser iguais, logo temos que para todo o $\alpha, \beta \in \{1, \ldots, n\}^k$ e $a \in \mathbb{Z}_2^n$ se tem que

$$(-1)^{a \cdot (\epsilon_{\beta_1} + \cdots + \epsilon_{\beta_k})} \Phi_\alpha^\beta = (-1)^{a \cdot (\epsilon_{\alpha_1} + \cdots + \epsilon_{\alpha_k})} \Phi_\alpha^\beta.$$

Fixemos α e β. Se $\Phi_\alpha^\beta \neq 0$ então temos que $(-1)^{a \cdot (\epsilon_{\beta_1} + \cdots + \epsilon_{\beta_n})} = (-1)^{a \cdot (\epsilon_{\alpha_1} + \cdots + \epsilon_{\alpha_k})}$.

Como a pode tomar qualquer valor em $\mathbb{Z}_2^n$, podendo particular ser ϵ_i, com $i \in \{1,\ldots,n\}$, temos que isto implica $\epsilon_{\beta_1} + \cdots + \epsilon_{\beta_k} = \epsilon_{\alpha_1} + \cdots + \epsilon_{\alpha_k}$. Notemos que esta igualdade é em $\mathbb{Z}_2^n$, pois estamos a trabalhar num expoente de uma potência cuja base é -1. Assim sendo só nos interessa saber a paridade de cada componente do vector resultante da soma.

Para $\alpha \in \{1,\ldots,n\}^k$, define-se $\alpha(j) = |\{i \in \{1,\ldots,k\} \mid \alpha_i = j\}|$, isto é, o número de entradas de α que são j.

Os vectores $\epsilon_{\beta_1} + \cdots + \epsilon_{\beta_k}$ e $\epsilon_{\alpha_1} + \cdots + \epsilon_{\alpha_k}$ são iguais em $\mathbb{Z}_2^n$ se para todo o $j \in \{1,\ldots,n\}$ temos que o número de parcelas iguais a ϵ_j tem igual paridade nas duas somas. Isto é equivalente a $\alpha(j) \equiv \beta(j) \pmod 2$ para todo $j \in \{1,\ldots,n\}$.

Como podemos reverter todos estes argumentos, temos então a seguinte base de $Z_k(\mathbb{Z}_2^n)$:

$$\{E_\alpha^\beta \mid \alpha,\beta \in \{1,\ldots,n\}^k \wedge \forall\, 1 \leq j \leq n \;\; \alpha(j) \equiv \beta(j) \pmod 2\},$$

onde $E_\alpha^\beta \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V^{\otimes k})$ é a aplicação definida por

$$E_\alpha^\beta x_\gamma = \delta_{\alpha,\gamma} x_\beta, \text{ para todo o } \gamma \in \{1,\ldots,n\}^k.$$

Vamos agora descrever as representações irredutíveis de $Z_k(\mathbb{Z}_2^n)$ que identificamos por Z_k^a, onde $a \in \Lambda_k(\mathbb{Z}_2^n)$.

Pelo Teorema do Duplo Centralizador, temos que $Z_k^a \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_2^n}(V_a, V^{\otimes k})$. Como V_a tem dimensão 1, cada homomorfismo de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_2^n}(V_a, V^{\otimes k})$ fica completamente determinado a partir da imagem de v_a. Logo, como na prova do Lema 5.7, o conjunto das imagens de v_a pelos homomorfismos presentes em $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_2^n}(V_a, V^{\otimes k})$ forma uma representação de $Z_k(\mathbb{Z}_2^n)$ isomorfa a $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_2^n}(V_a, V^{\otimes k})$. Esta representação por sua vez está contida em $V^{\otimes k}$. Vai ser exactamente a esta representação que vamos chamar de Z_k^a.

Vamos então ver quais as imagens possíveis para v_a. Analogamente ao que vimos anteriormente, devido ao facto de termos que $b\phi(v_a) = \phi(bv_a)$, onde $\phi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_2^n}(V_a, V^{\otimes k})$ e $b \in \mathbb{Z}_2^n$, vamos poder concluir que $\phi(v_a)$ é combinação linear de elementos da forma x_β, com $\beta = (\beta_1,\ldots,\beta_k) \in \{1,\ldots,n\}^k$ tal que $\epsilon_{\beta_1} + \cdots + \epsilon_{\beta_k} = a$.

Temos então a seguinte base de Z_k^a

$$\{x_\beta \mid \beta = (\beta_1,\ldots,\beta_k) \in \{1,\ldots,n\}^k : \epsilon_{\beta_1} + \cdots + \epsilon_{\beta_k} = a\}.$$

6.4 Partições de $2n$

Lembremos que o grupo hiperoctaedral $G(2,1,n)$ tem dois subgrupos importantes, $\mathbb{Z}_2^n$ e S_n, que juntos formam um conjunto de geradores do grupo.

Reciprocamente, se considerarmos as álgebras centralizadoras destes subgrupos relativamente a $V^{\otimes k}$, temos que $\mathrm{End}_{G(2,1,n)}(V^{\otimes k}) \subseteq \mathrm{End}_{\mathbb{Z}_2^n}(V^{\otimes k})$ e que $\mathrm{End}_{G(2,1,n)}(V^{\otimes k}) \subseteq$

$\mathrm{End}_{S_n}(V^{\otimes k})$, pois se uma transformação comuta a acção de um grupo, também comutará com a acção de um subgrupo desse grupo.
Devido ao facto de S_n e $\mathbb{Z}_2^n$ gerarem $G(2,1,n)$, temos que $\mathrm{End}_{G(2,1,n)}(V^{\otimes k}) = \mathrm{End}_{\mathbb{Z}_2^n}(V^{\otimes k}) \cap \mathrm{End}_{S_n}(V^{\otimes k})$. Uma vez que já temos $\mathrm{End}_{\mathbb{Z}_2^n}(V^{\otimes k})$ devidamente identificado, falta-nos identificar $\mathrm{End}_{S_n}(V^{\otimes k})$.
Seja $\sigma \in S_n$. Temos que:

$$\sigma \cdot x_\beta = \sigma x_{\beta_1} \otimes \cdots \otimes \sigma x_{\beta_k} = x_{\sigma(\beta_1)} \otimes \cdots \otimes x_{\sigma(\beta_k)} = x_{\sigma\beta},$$

onde $\sigma\beta := (\sigma(\beta_1), \ldots, \sigma(\beta_n))$.
Analogamente ao que fizemos anteriormente, consideremos $\Phi \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V^{\otimes k})$ uma aplicação linear. Para $\alpha \in \{1, \ldots, n\}^k$, temos então que:

$$\Phi x_\alpha = \sum_{\beta \in \{1,\ldots,n\}^k} \Phi_\alpha^\beta x_\beta,$$

onde $\Phi_\alpha^\beta \in \mathbb{C}$ para todos $\alpha, \beta \in \{1, \ldots, n\}^k$. Seja $a \in \mathbb{Z}_2^n$. Então:

$$\begin{aligned}
\sigma(\Phi x_\alpha) &= \sigma \sum_{\beta \in \{1,\ldots,n\}^k} \Phi_\alpha^\beta x_\beta = \sum_{\beta \in \{1,\ldots,n\}^k} \Phi_\alpha^\beta x_{\sigma\beta} = \sum_{\beta \in \{1,\ldots,n\}^k} \Phi_\alpha^{\sigma^{-1}\beta} x_\beta, \\
\Phi(\sigma x_\alpha) &= \Phi(x_{\sigma\alpha}) = \sum_{\beta \in \{1,\ldots,n\}^k} \Phi_{\sigma\alpha}^\beta x_\beta.
\end{aligned}$$

Se $\Phi \in Z_k(S_n)$ então $\Phi \circ \sigma$ e $\sigma \circ \Phi$ têm de ser iguais, logo temos que para todo o $\alpha, \beta \in \{1, \ldots, n\}^k$ e $\sigma \in S_n$ se tem que $\Phi_\alpha^{\sigma^{-1}\beta} = \Phi_{\sigma\alpha}^\beta$, o que equivale a $\Phi_\alpha^\beta = \Phi_{\sigma\alpha}^{\sigma\beta}$.
Sejam $a, b \in \{1, \ldots, n\}^k$. Definimos $a \star b = (a_1, \ldots a_k, b_1, \ldots, b_k) \in \{1, \ldots, n\}^{2k}$ a concatenação dos dois vectores. Seja $p = (p_1, \ldots, p_{2k}) \in \{1, \ldots, n\}^{2k}$. Então p induz uma partição do conjunto $\{1, \ldots, 2k\}$ onde i e j estão numa mesma parte se $p_i = p_j$.
Criamos então a seguinte relação de equivalência em $\{1, \ldots, n\}^{2k}$. Sejam $p = (p_1, \ldots p_{2k})$, $q = (q_1, \ldots, q_{2k}) \in \{1, \ldots, n\}^{2k}$. Então

$$p \sim q \text{ sse } \forall i, j \in \{1, \ldots, 2k\}\, p_i = p_j \Leftrightarrow q_i = q_j$$

Isto é o mesmo que dizer que p e q induzem a mesma partição de $\{1, \ldots, 2k\}$.
Seja $\sigma \in S_n$. Então $\sigma p = (\sigma(p_1), \ldots, \sigma(p_{2k}))$. Logo temos que $p \sim \sigma p$, para todo o $\sigma \in S_n$, e reciprocamente, se $p \sim q$ então existe $\sigma \in S_n$ tal que $p = \sigma q$. Assim a condição $\Phi_\alpha^\beta = \Phi_{\sigma\alpha}^{\sigma\beta}$ para todo o $\sigma \in S_n$ equivale a dizer que $\Phi_a^b = \Phi_c^d$ sempre que $a \star b \sim c \star b$.
Para cada partição π de $\{1, \ldots, 2k\}$ com no máximo n partes, existe $a \in \{1, \ldots, n\}^{2k}$ tal que a partição de $\{1, \ldots, 2k\}$ induzida por a é π. Para isto basta etiquetar (com etiquetas

diferentes) as diferentes partes de π com números de 1 a n, e associamos a a_i a etiqueta da parte em que i está inserido (em π).
Notemos que tendo $a \in \{1,\ldots,n\}^{2k}$ podemos encontrar facilmente $\alpha, \beta \in \{1,\ldots,n\}^k$ tais que $a = \alpha \star \beta$, bastando para isto considerar as projecções adequadas.
Logo, para cada partição π de $\{1,\ldots,2k\}$ com no máximo n partes, existem $\alpha_\pi, \beta_\pi \in \{1,\ldots,n\}^k$ tais que $\alpha_\pi \star \beta_\pi$ induzem a partição π.
Temos portanto a seguinte base de $Z_k(S_n)$:

$$\left\{ \sum_{c\star d \sim \alpha_\pi \star \beta_\pi} E_c^d \mid \pi \text{ é uma partição de } \{1,\ldots,2k\} \text{ com no máximo } n \text{ partes} \right\}.$$

Lembremos que $E_c^d \in Z_k(\mathbb{Z}_2^n)$ obriga a $c(j) \equiv d(j) \pmod 2$ para todo o j entre 1 e n. Isto é o mesmo que dizer que para todo o j entre 1 e n tem-se que $(c\star d)(j)$ é par. Logo a partição induzida por $c \star d$ tem no máximo n partes e todas de tamanho par.
Notemos que a partição induzida por $c \star d$ vai ser igual à partição induzida por $\sigma c \star \sigma d$, para todo o $\sigma \in S_n$, logo temos a seguinte base de $Z_k(G(2,1,n))$:

$$\left\{ \sum_{c\star d \sim \alpha_\pi \star \beta_\pi} E_c^d \mid \begin{array}{c} \pi \text{ é uma partição de } \{1,\ldots,2k\} \text{ com no} \\ \text{máximo } n \text{ partes, todas de tamanho par.} \end{array} \right\}$$

6.5 Contagens

Sabendo que a dimensão de $Z_k(G(2,1,n))$ é igual ao número de partições de $\{1,\ldots,2k\}$ com no máximo n partes onde todas têm tamanho par, temos interesse em contar o número de partições nestas condições.

Proposição 6.3. *Seja $T(k,r)$ o número de partições de $\{1,\ldots,2k\}$ em r partes de tamanho par. Então*

$$T(k,r) = \sum_{\lambda=(\lambda_1,\ldots,\lambda_r)\vdash k} \frac{1}{l_1^\lambda! \cdot \cdots \cdot l_k^\lambda!} \binom{2k}{2\lambda_1, 2\lambda_2, \ldots, 2\lambda_r},$$

onde $(\lambda_1,\ldots,\lambda_r) \vdash k$ quer dizer que $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_r > 0$ e $\lambda_1 + \cdots + \lambda_r = k$ e $l_j^\lambda = |\{i \mid \lambda_i = j\}|$.

Demonstração. Se $(2\lambda_1,\ldots,2\lambda_r)$ é uma partição de $2k$ com r partes pares, então temos que $\lambda = (\lambda_1,\ldots,\lambda_r)$ é uma partição de k com r partes. Notemos que aqui estamos a ignorar que elementos de $\{1,\ldots,2k\}$ estão em cada parte, e estamos só a prestar atenção aos tamanhos das partes.

Então o índice do somatório corresponde exactamente à escolha destes tamanhos das partes. Fixando então uma partição $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$ de k com r partes, vamos procurar contar o número de partições do conjunto $\{1, \ldots, 2k\}$ cujas partes têm tamanho $2\lambda_1, \ldots, 2\lambda_r$. Temos então de escolher quais os elementos de $\{1, \ldots, 2k\}$ que ficam em cada parte, e isso é dado pelo coeficiente multinomial $\binom{2k}{2\lambda_1,\ldots,2\lambda_r}$. Notemos que se tivermos partes de igual tamanho, qualquer permutação destas partes está a ser indevidamente contada em $\binom{2k}{2\lambda_1,\ldots,2\lambda_r}$, uma vez que não estamos a etiquetar as partes de algum modo. Logo temos que dividir por $l_j^\lambda!$, com j a variar entre 1 e k, onde l_j^λ vai corresponder ao número de partes de $\{1, \ldots, 2k\}$ de tamanho $2j$, o que corresponde ao numero de ocorrências de j em λ. $\square$

Logo temos os seguintes corolários:

Corolário 6.3.

$$\dim Z_k(G(2,1,n)) = \sum_{r=1}^{n} T(k,r)$$

A demonstração deste corolário é directa, tendo em conta o que já vimos.

Corolário 6.4.

$$\dim Z_k(\mathbb{Z}_2^n) = \sum_{r=1}^{n} T(k,r) r! \binom{n}{r}$$

Demonstração. Falando em partições, um elemento da base de $Z_k(\mathbb{Z}_2^n)$ vai induzir uma partição em partes pares de $\{1, \ldots, 2k\}$, mas há elementos diferentes da base de $Z_k(\mathbb{Z}_2^n)$ que induzem uma mesma partição, mais propriamente, se a partição tiver r partes, há um elemento da base que induza esta partição para cada etiquetagem destas partes, onde as etiquetas são números entre 1 e n, todas distintas. Para isto, tendo uma partição em r partes pares de $\{1, \ldots, 2k\}$, temos ainda de escolher r etiquetas das n possíveis e atribui-las às diferentes partes. $\square$

Podemos então concluir a seguinte igualdade:

$$\dim Z_k(\mathbb{Z}_2^n) = 2^{-n} \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (n-2i)^{2k} = \sum_{r=1}^{n} T(k,r) r! \binom{n}{r}.$$

6.6 Funções geradoras

Voltamos agora a olhar para o n-cubo como sendo o grafo da representação $\mathcal{R}_V(\mathbb{Z}_2^n)$, com $V = V_{\epsilon_1} \oplus \cdots \oplus V_{\epsilon_n}$. Seja $a \in \mathbb{Z}_2^n$; recordamos que m_k^a é o número de caminhos de 0 até a no n-cubo de comprimento k. Seja $g^a(t) = \sum_{k \geq 0} m_k^a \frac{t^k}{k!}$ a função geradora exponencial associado ao número de caminhos de 0 até a no n-cubo de comprimento k.

Definimos o seno e o cosseno hiperbólico como sendo as seguintes séries formais:

$$\sinh(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^{2j+1}}{(2j+1)!},$$
$$\cosh(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^{2j}}{(2j)!}.$$

Temos então o seguinte teorema:

Teorema 6.1. *Seja $a \in \mathbb{Z}_2^n$ e $g^a(t)$ definido como acima. Então*

$$g^a(t) = \cosh(t)^{n-h} \sinh(t)^h,$$

onde h é o peso de Hamming de a.

Demonstração. Seja h o peso de Hamming de a. Então, devido a uma certa simetria do n-cubo, temos que existem tantos caminhos de 0 para a como de 0 para $(1, \dots, 1, 0, \dots, 0)$, onde as primeiras h entradas são 1 e as restantes 0. Consideremos então $a = (1, \dots, 1, 0, \dots, 0)$. O número de caminhos de 0 até a em k passos é o número de k-tuplos ordenados $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in \{1, \dots, n\}^k$ tais que

$$\epsilon_{\alpha_1} + \cdots + \epsilon_{\alpha_k} = a.$$

Cada α induz uma partição de $\{1, \dots, k\}$ devidamente etiquetada, pelo processo já descrito, e o recíproco também acontece, assumindo que há um máximo de n partes. Notemos que a parte associada à etiqueta j, com j entre 1 e h tem de ter tamanho ímpar, e que as restantes partes têm de ter tamanho par, assegurando assim que $\epsilon_{\alpha_1} + \cdots + \epsilon_{\alpha_k} = a$. Seja λ_i o tamanho da parte associada à etiqueta i. Temos que $\lambda_i \geq 0$ para todo o $1 \leq i \leq n$. Vamos então contar o número de partições de $\{1, \dots, k\}$ em n partes (algumas eventualmente vazias), devidamente etiquetadas, com λ_i ímpar para $i \leq h$ e λ_i par para $i > h$. Fixado o tamanho das partes e as etiquetas das partições, isto não é mais que uma combinação multinomial, pois temos somente de escolher quais os elementos que estão associados a cada parte.
Temos então que o número de caminhos é dado por:

$$m_k^a = \sum_{\substack{\lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0 \\ \lambda_1 + \cdots + \lambda_n = k \\ \lambda_1, \dots, \lambda_h \text{ são ímpares} \\ \lambda_{h+1}, \dots, \lambda_n \text{ são pares}}} \binom{k}{\lambda_1, \dots, \lambda_n}.$$

Logo temos que

$$m_k^a \frac{t^k}{k!} = \sum_{\substack{\lambda_1,\ldots,\lambda_n \geq 0 \\ \lambda_1+\cdots+\lambda_n=k \\ \lambda_1,\ldots,\lambda_h \text{são ímpares} \\ \lambda_{h+1},\ldots,\lambda_n \text{são pares}}} \frac{t^k}{\lambda_1! \times \cdots \times \lambda_n!}.$$

Por outro lado temos:

$$\cosh(t)^{n-h}\sinh(t)^h = \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^{2j}}{(2j)!}\right)^{n-h} \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^{2j+1}}{(2j+1)!}\right)^h.$$

Vamos ver o coeficiente de t^k do produto.
Isto obriga a escolhermos h parcelas da forma $\frac{t^{2j+1}}{(2j+1)!}$ e $n-h$ parcelas da forma $\frac{t^{2j}}{(2j)!}$ com a propriedade que a soma dos expoentes das parcelas escolhidas seja k. Seja $\lambda_1, \ldots, \lambda_h$ os primeiros h expoentes e $\lambda_{h+1}, \ldots, \lambda_n$ os restantes. Temos que $\lambda_1, \ldots, \lambda_h$ têm de ser ímpares e que $\lambda_{h+1}, \ldots, \lambda_n$ têm de ser pares, e todos não-negativos.
Logo, o coeficiente de t^k é dado por:

$$\sum_{\substack{\lambda_1,\ldots,\lambda_n \geq 0 \\ \lambda_1+\cdots+\lambda_n=k \\ \lambda_1,\ldots,\lambda_h \text{são ímpares} \\ \lambda_{h+1},\ldots,\lambda_n \text{ são pares}}} \frac{1}{\lambda_1! \times \cdots \times \lambda_n!}.$$

E isto é igual ao coeficiente de t^k em $g^a(t)$, o que conclui que, para $a \in \mathbb{Z}_2^n$, a função geradora exponencial $g^a(t)$ é efectivamente igual a $\cosh(t)^{n-h}\sinh(t)^h$, onde h é o peso de Hamming de a. $\square$

Bibliografia

[1] J. L. Alperin and Rowen B. Bell. *Groups and representations*, volume 162 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1995.

[2] Georgia Benkart and Dongho Moon. A Schur-Weyl Duality Approach toWalking on Cubes. *Ann. Comb.*, 20(3):397–417, 2016.

[3] C. Bowman, M. De Visscher, and R. Orellana. The partition algebra and the Kronecker coefficients. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 367(5):3647–3667, 2015.

[4] David M. Bressoud. *Proofs and confirmations*. MAA Spectrum. Mathematical Association of America, Washington, DC; Cambridge University Press, Cambridge, 1999. The story of the alternating sign matrix conjecture.

[5] Matej Brešar. *Introduction to noncommutative algebra*. Universitext. Springer, Cham, 2014.

[6] William Fulton. *Young tableaux*, volume 35 of *London Mathematical Society Student Texts*. Cambridge University Press, Cambridge, 1997. With applications to representation theory and geometry.

[7] Pavel Etingof, Oleg Golberg, Sebastian Hensel, Tiankai Liu, Alex Schwendner, Dmitry Vaintrob, and Elena Yudovina. *Introduction to representation theory*, volume 59 of *Student Mathematical Library*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2011. With historical interludes by Slava Gerovitch.

[8] William Fulton and Joe Harris. *Representation theory*, volume 129 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1991. A first course, Readings in Mathematics.

[9] Roe Goodman and Nolan R. Wallach. *Symmetry, representations, and invariants*, volume 255 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, Dordrecht, 2009.

[10] R.S. Pierce. *Associative Algebras*, volume 88 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1982. Studies in the History of Modern Science, 9.

[11] Bruce E. Sagan. *The symmetric group*, volume 203 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second edition, 2001. Representations, combinatorial algorithms, and symmetric functions.

[12] Richard P. Stanley. *Algebraic combinatorics*. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer, New York, 2013. Walks, trees, tableaux, and more.

[13] Nolan R. Wallach. Invariant differential operators on a reductive Lie algebra and Weyl group representations. *J. Amer. Math. Soc.*, 6(4):779–816, 1993.

[14] Hermann Weyl. *The Classical Groups. Their Invariants and Representations*. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1939.